

IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Vol. VII, N. 2

Serie nona

12 Marzo 1950

Azione del campo magnetico sul funzionamento dei contatori G. M.

P. BASSI, I. FILOSOFO e L. PRINZI

Centro di studio per gli Ioni veloci del C.N.R. - Istituto di Fisica dell'Università di Padova

(ricevuto il 28 Dicembre 1949)

Riassunto. — Si espongono i risultati di uno studio sul funzionamento dei contatori di G.M. in campo magnetico. Un campo di 8000 gauss parallelo all'asse del contatore, provoca un aumento nel numero di impulsi ritardati di circa 1 μ sec e una diminuzione della lunghezza efficace del contatore. Se il campo è perpendicolare al contatore non si nota nessuno dei fenomeni suddetti. In nessun caso si ha variazione del tempo di inefficienza del contatore. Si cerca infine di inquadrare i risultati ottenuti nel modello attualmente usato per descrivere la scarica nei contatori di G.M.

Il meccanismo di funzionamento dei contatori di G.M. ha ricevuto una interpretazione soddisfacente nelle sue linee generali attraverso i lavori di C. G. e D. D. MONTGOMERY ⁽¹⁾, di H. G. STEVER ⁽²⁾ e di S. A. KORFF e R. D. PRESENT ⁽³⁾. Il modello costruito da questi Autori presenta tuttavia ancora dei punti oscuri che le ricerche ulteriori devono chiarire.

In vista di esperienze in cui si debbano usare alti poteri risolutivi, o misurare ritardi fra impulsi dell'ordine di 10^{-6} sec, occorre impiegare contatori

⁽¹⁾ C. G. e D. D. MONTGOMERY: *Phys. Rev.*, **57**, 1030 (1940).

⁽²⁾ H. G. STEVER: *Phys. Rev.*, **61**, 38 (1942).

⁽³⁾ S. A. KORFF e R. D. PRESENT: *Phys. Rev.*, **65**, 274 (1944).

con un breve tempo di salita e senza ritardi apprezzabili fra il passaggio della particella ionizzante e l'inizio dell'impulso. Ci occuperemo qui essenzialmente dello studio di questi impulsi ritardati, dando cenno di altre osservazioni fatte.

1. — Meccanismo di scarica.

Consideriamo un contatore nel suo montaggio tipico col filo positivo rispetto al cilindro: quando una particella ionizzante che lo attraversa crea una coppia ione positivo-elettrone, il primo va verso il cilindro e l'elettrone verso il filo intorno al quale il campo ha una intensità maggiore. Se quest'ultima supera un certo valore E_{min} , l'elettrone acquista le possibilità di ionizzare e si forma la cosiddetta valanga. In un tempo molto breve (qualche 10^{-7} sec) tutti gli elettroni vengono raccolti dal filo dando luogo ad una variazione negativa del potenziale di questo: intorno resta una guaina di ioni positivi. Col concorso di questi due fenomeni si ha una riduzione del campo che interrompe la scarica ed impedisce l'eventuale formazione di altre scariche dovute a successivi eventi ionizzanti; questo finchè gli ioni positivi non raggiungano una distanza dal filo sufficiente perchè il campo superi di nuovo il valore E_{min} e ciò avviene dopo un tempo (tempo morto) dell'ordine di qualche 10^{-4} sec. Gli impulsi appaiono dapprima di grandezza minore del normale, ma crescente man mano che gli ioni positivi si avvicinano al catodo: solo quando lo hanno raggiunto, il contatore si trova nelle condizioni iniziali, e ciò richiede ancora un tempo di qualche 10^{-4} sec (tempo di recupero).

Nell'urto contro le pareti, gli ioni positivi, oltrechè neutralizzarsi possono però provocare una emissione di elettroni secondari i quali possono dar luogo a loro volta a una nuova valanga. A questo inconveniente si pone rimedio con alte resistenze di spegnimento ($10^8 \div 10^9$ ohm) oppure usando nella miscela di riempimento gas a molecola poliatomica. Le teorie del tempo morto e del tempo di recupero sviluppate e confrontate con l'esperienza da STEVER⁽²⁾ riguardano entrambe la fase di discesa dell'impulso, cioè di ritorno del filo al potenziale normale. Sia questa che le questioni riguardanti le proprietà specifiche delle miscele di riempimento, esulano dallo scopo di questo lavoro.

Noi ci soffermeremo invece sulle osservazioni finora fatte sulla fase di salita: queste osservazioni mostrano che l'impulso raggiunge in genere il suo valore massimo in un tempo inferiore al μ sec, tanto che nelle considerazioni abituali si usa trattare l'impulso come contemporaneo al passaggio della particella ionizzante. Solo recentemente alcuni sperimentatori, studiando il comportamento dei contatori da impiegare in misure di vita media del mesone μ , hanno scoperto l'esistenza di impulsi ritardati fino a qualche 10^{-6} sec rispetto al passaggio della particella ionizzante. Le prime osservazioni in proposito sono quelle di C. G. MONTGOMERY, W. E. RAMSEY, D. B. COWIE e D. D. MONT-

GOMERY ⁽⁴⁾ e di J. V. DUNWORTH ⁽⁵⁾. I primi, usando contatori riempiti con una miscela di argon (95 %) e ossigeno (5 %) hanno trovato impulsi ritardati di 2 μsec , con una frequenza di 1,5 % e di 5 μsec , con frequenza di 0,5 %.

F. RASETTI ⁽⁶⁾ e M. CONVERSI e O. PICCIONI ⁽⁷⁾ invece, con le miscele di riempimento ordinarie di argon e alcool, non ne hanno riscontrati in quantità apprezzabile oltre 0,5 μsec , ed infine B. ROSSI, M. SANDS e R. SARD ⁽⁸⁾ hanno trovato nella stessa miscela come limite superiore un impulso su 5 000, ritardato d'oltre 0,9 μsec .

I MONTGOMERY ⁽⁴⁾ hanno cercato di interpretare qualitativamente il fenomeno, attribuendo i ritardi alla diminuzione accidentale di mobilità dell'elettrone primario, dovuta a cattura di questo da parte di una molecola del gas. Ovvie considerazioni mostrano che: 1) il fatto si potrà presentare praticamente quando vi è una sola coppia di ioni, quindi un solo elettrone primario; 2) che l'elettrone rimarrà vincolato alla molecola solo per una piccola frazione del percorso, per giustificare ritardi di 10^{-6} anziché di 10^{-4} sec come si dedurrebbe dalla mobilità degli ioni O_2^- .

Il disaccordo quantitativo fra i risultati citati dipende dal fatto che la probabilità di cattura di un elettrone da parte di una molecola O_2 è assai più alta di quella relativa ad un atomo A. È quindi spiegabile che C. G. MONTGOMERY e coll. ⁽⁴⁾ trovassero delle percentuali di impulsi ritardati molto superiori a quelle di altri che lavoravano con gas privi di ossigeno. Una conferma di questo modello è data da una misura di M. E. ROSE e W. E. RAMSEY ⁽⁹⁾ in cui, ammettendo vere le ipotesi fatte, si risale a valori della mobilità ionica e della probabilità di cattura di elettroni da O_2 in accordo con le misure fatte con altri metodi.

2. - Nostre determinazioni.

Abbiamo eseguito alcune esperienze riguardanti il comportamento di contatori in campo magnetico. Ci sembra che i risultati di esse presentino interesse sia dal punto di vista pratico per chi debba usare contatori in tali condizioni, sia dal punto di vista teorico nei riguardi del modello sopra richiamato.

⁽⁴⁾ C. G. MONTGOMERY, W. E. RAMSEY, D. B. COWIE e D. D. MONTGOMERY: *Phys. Rev.*, **56**, 635 (1939).

⁽⁵⁾ J. V. DUNWORTH: *Nature*, **144**, 152 (1939).

⁽⁶⁾ F. RASETTI: *Phys. Rev.*, **60**, 198 (1941).

⁽⁷⁾ M. CONVERSI e O. PICCIONI: *Nuovo Cimento*, **2**, 278 (1943).

⁽⁸⁾ B. ROSSI, M. SANDS e R. SARD: *Phys. Rev.*, **72**, 120 (1947).

⁽⁹⁾ M. E. ROSE e W. E. RAMSEY: *Phys. Rev.*, **59**, 616 (1941).

a) *Descrizione del circuito.* — Il circuito usato permette di registrare le coincidenze doppie fra due contatori, e le triple ritardate degli stessi contatori con un terzo. Il circuito di doppie (potere risolutivo $1,2 \mu\text{sec}$) dà un impulso che può essere ritardato da una linea a costanti concentrate di un tempo che va da zero a diversi μsec . All'uscita della linea, un multivibratore ad accoppiamento catodico dà un impulso rettangolare di larghezza regolabile, ritardato rispetto alle doppie: con questo impulso si fa coincidere quello che viene dal terzo contatore. Per rivelare impulsi ritardati abbiamo preferito questo metodo sostanzialmente differenziale a quello delle coincidenze triple a potere

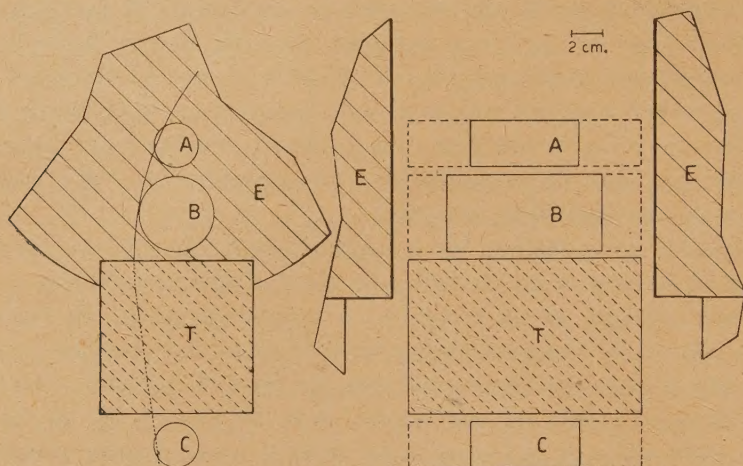


Fig. 1.

risolutivo variabile ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ ⁽⁷⁾ che dà un risultato integrale e quindi richiede conteggi prolungati per avere piccoli errori sui dati differenziali. La taratura ed il controllo sono stati fatti con un impulsatore a due impulsi sfasabili a piacere ed un sincroscopio del tipo descritto da D. J. MEDLEY e H. D. RATHGEBER ⁽¹⁰⁾ che permettono di apprezzare il decimo di microsecondo.

Escludendo la linea di ritardo si ha un normale circuito di doppie e triple che ci è servito in una parte delle misure.

b) *Misure di ritardi in campo magnetico.* — Sono stati disposti in telescopio, come per una normale misura di rendimento (fig. 1) tre contatori: due estremi A e C di $3 \times 7 \text{ cm}^2$ e uno B, centrale, di $5 \times 10 \text{ cm}^2$.

Tutti i raggi che fanno una coincidenza doppia sistematica AC passano pure per B nel caso che non ci sia il campo. La presenza di questo determina invece un incurvamento di alcuni di essi in modo da farli attraversare AC ma

⁽¹⁰⁾ M. J. MEDLEY e H. D. RATHGEBER: *Journ. Sc. Inst.*, **25**, 234 (1948).

non B (traiettoria disegnata in fig. 1). Poichè in tali condizioni, questi eventi sono dovuti a raggi d'energia non troppo elevata, essi si possono eliminare ponendo fra B e C , un assorbitore T di piombo: il suo spessore può essere opportunamente calcolato in base ad una valutazione del raggio massimo di curvatura.

In tabella I sono riportate le percentuali di triple ritardate rispetto alle doppie con campo parallelo e perpendicolare all'asse del contatore per due ritardi diversi: si è ritenuto necessario fare due serie di misure anche senza campo perchè la geometria del telescopio rispetto alle espansioni dell'elettromagnete è diversa nei due casi.

TABELLA I.

Ritardi	Contatore parallelo al campo		Contatore perpendicolare al campo	
	0,8 - 2 μ sec	1,4 - 3,6 μ sec	0,8 - 2 μ sec	1,4 - 3,6 μ sec
0 gauss	$1,72 \pm 0,30$	$0,10 \pm 0,10$	$1,37 \pm 0,40$	—
8100 gauss	$3,83 \pm 0,40$	$0,30 \pm 0,17$	$1,53 \pm 0,30$	—

Risulta che, col campo parallelo al contatore si ha un aumento sensibile nel numero di impulsi ritardati, col campo perpendicolare non vi è aumento apprezzabile entro gli errori.

c) *Misure di rendimento e di tempo di inefficienza in campo magnetico.* — In tabella II sono riportati i rendimenti percentuali con campo e senza campo, del contatore B (fig. 1). Il potere risolutivo della tripla era qui di 1 μ sec.

TABELLA II.

	Contatore parallelo al campo	Contatore perpendicolare al campo
0 gauss	$95,0 \pm 0,8$	$88,8 \pm 1,1$
8100 gauss	$88,3 \pm 1,2$	$90,8 \pm 1,1$

Anche qui, data la diversa distribuzione delle masse dell'elettromagnete rispetto al telescopio, nei due casi, è stato necessario fare le misure senza campo in entrambe le posizioni.

L'inefficienza riscontrata senza campo dipende dalle doppie causali, dagli sciami e dal tempo morto del contatore centrale. Questi contributi qui ci interessano solo globalmente e non abbiamo cercato di valutarli in modo particolareggiato. Per misurare invece una eventuale variazione del tempo di inefficienza col campo e senza campo abbiamo usato, nel caso di campo parallelo, il metodo della variazione di frequenza nel conteggio ⁽¹¹⁾.

Con un preparato radioattivo opportunamente schermato aumentiamo il numero di impulsi del solo contatore centrale *B* e ripetiamo le misure di rendimento rispettivamente con N_1 e N_2 imp/sec. Siano α le perdite dovute a sciami e casuali e P_1, P_2 le perdite percentuali nei due casi. Se t è il tempo di inefficienza si scrivono le equazioni:

$$N_1 t 100 + \alpha = P_1,$$

$$N_2 t 100 + \alpha = P_2,$$

da cui $t = (P_1 - P_2)/100(N_1 - N_2)$ sec.

Il tempo di inefficienza ottenuto con e senza campo è di $2 \pm 1 \cdot 10^{-3}$ sec.

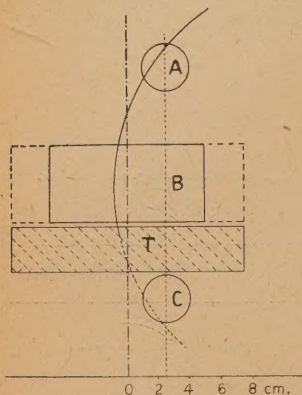


Fig. 2.

d) Misure di lunghezza efficace del contatore in campo magnetico. - Abbiamo disposto i contatori

come in fig. 2 per misurare le triple *ABC* per varie posizioni di *B* rispetto alla doppia *AC*.

Nel caso di campo perpendicolare al contatore *B*, la misura poteva essere falsata da raggi che facessero scattare la doppia *AC* senza essere compresi nell'angolo solido da essa definito (fig. 2, traiettoria disegnata). Per diminuire questo effetto abbiamo posto uno strato di piombo *T* sotto il contatore *B* col solito scopo di assorbire i raggi con curvatura maggiore che rendono imprecise le misure. I risultati sono in fig. 3 ove le ascisse sono le stesse di fig. 2, e le ordinate sono le triple *A, B, C* normalizzate a 100. Risulta che se il campo è parallelo al contatore la sua lunghezza efficace diminuisce, se è perpendicolare essa resta inalterata.

3. - Discussione dei risultati.

Dapprima cercheremo di inquadrare i risultati ottenuti nell'attuale teoria dei contatori, poi vedremo l'interesse pratico delle nostre misure.

⁽¹¹⁾ A. L. HODSON: *Journ. Sc. Inst.*, **25**, 11 (1948).

a) *Mobilità di elettroni e ioni.* — Si è soliti definire come mobilità ⁽¹²⁾ il rapporto fra la velocità di migrazione (cioè la velocità apparente con cui elettroni e ioni si spostano attraverso un gas) e il campo elettrico che determina il moto:

$$(1) \quad \mu = \frac{u}{E}.$$

Per gli ioni, μ non dipende da E almeno entro certi limiti, più precisamente per l'argon se il rapporto fra campo e pressione è al di sotto di 5 vol/cm/torr, μ non dipende da E ; al di sopra, al crescere di E , μ dapprima

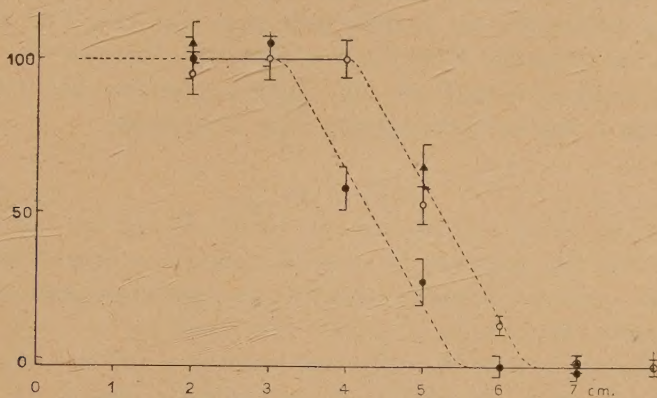


Fig. 3. — ○ senza campo; ● campo parallelo al contatore; ▲ campo perpendicolare al contatore.

aumenta, poi cala con legge non ben nota. In un contatore normale il rapporto suddetto è inferiore a 5 nella zona lontana dal filo e perciò qui μ è costante. Possiamo allora per questa zona sviluppare la teoria che invece non potrebbe dare, per l'incertezza rilevata, una interpretazione precisa del moto degli ioni vicino al filo. Per gli elettroni la dipendenza di μ da E è complicata dall'effetto RAMSAUER. Per basse energie di agitazione si assume di solito per la mobilità l'espressione:

$$(2) \quad \mu(E) = \text{cost} \left(\frac{1}{E} \right)^{1/2},$$

dedotta teoricamente ammettendo il modello degli urti tra sfere elastiche per gli urti fra elettroni e molecole con percorso libero medio indipendente dall'energia.

⁽¹²⁾ K. K. DARROW: *Electrical Phenomena in Gases* (Baltimore, 1932); ad esso ci riferiamo pure per le notazioni.

Il valore teorico della costante di proporzionalità

$$\left[\left(\frac{m}{8M} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{el}{m}} \right] \quad (12)$$

risulta inferiore di un ordine di grandezza a quello che corrisponde ai tempi di salita degli impulsi osservati nei contatori di G.M. e nelle camere a ionizzazione rapide ⁽¹³⁾; l'aumento di l rispetto al valore cinetico che corrisponde all'effetto RAMSAUER alle minime energie, non è sufficiente a giustificare il disaccordo: sembra piuttosto che questo si debba ricondurre al fatto che la distribuzione delle direzioni di rimbalzo degli elettroni negli urti, non è isotropa, come si dedurrebbe dal modello delle sfere elastiche, e ciò risulta anche da esperienze di DYMOND, HARNWELL e ARNOT-MACMILLEN ⁽¹²⁾. Dopo pochi urti però gli elettroni acquistano una energia superiore per cui si ha dall'esperienza che è approssimativamente vera la relazione

$$(2') \quad \mu(E) = \text{cost} \frac{1}{E}.$$

Essa vale fino alla zona ove ha luogo la valanga, e, poichè tale zona è ristretta ad un piccolo volume attorno al filo, potremo praticamente assumere (2') sempre valida.

Oltre al campo elettrico E , sullo ione positivo e sull'elettrone agisce una forza dovuta al campo magnetico; generalizzeremo dunque (1), (2) e (2'), ponendo al posto di \mathbf{E}

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{F}_H.$$

Per definire \mathbf{F}_H occorre sapere qual'è la velocità su cui agisce il campo magnetico. Si può assumere con buona approssimazione ⁽¹⁴⁾ che essa sia la velocità di migrazione u .

Il campo elettrico nei contatori di G.M. nel caso del solo elettrone è quello del condensatore cilindrico

$$(3) \quad E = \frac{V}{\lg b/a} \frac{1}{\rho},$$

ove b è il raggio del contatore e a quello del filo. Nel caso dello ione positivo esso va aumentato di quello creato dalla corona degli altri ioni e vale

$$(3') \quad E' = \frac{V'}{\lg b/a} \frac{1}{\rho},$$

con $V' > V$ ⁽⁶⁾.

⁽¹³⁾ H. S. BRIDGE, W. E. HAZEN, B. ROSSI e R. W. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **74**, 1083 (1948).

⁽¹⁴⁾ G. H. HUXLEY: *Phil. Mag.*, **23**, 210 (1937).

b) *Moto dell'elettrone; impulsi ritardati.* - Nel caso del contatore parallelo al campo le equazioni del moto dell'elettrone sono, espresse in coordinate polari

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \mu \left[-E + \frac{H}{C} \rho \frac{d\vartheta}{dt} \right], \\ \rho \frac{d\vartheta}{dt} = -\mu \frac{H}{C} \frac{d\rho}{dt}. \end{cases}$$

Ricordando la (3) e la (2') generalizzata $\mu = K/F$ e per valori della forza magnetica confrontabili con quelli della forza elettrica avremo

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = K, \\ \rho \frac{d\vartheta}{dt} = -K, \end{cases}$$

cioè $\vartheta = \lg(\rho_0/\rho)$.

Si conchiude che per H abbastanza grande l'elettrone segue una traiettoria a spirale.

Quando il contatore è perpendicolare al campo valgono, nel piano passante per il filo e perpendicolare al campo, le seguenti equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \mu \left[-E + \frac{H}{C} \frac{dx}{dt} \right], \\ \frac{dx}{dt} = -\mu \frac{H}{C} \frac{dy}{dt}, \end{cases}$$

prendendo il filo sull'asse x .

Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso precedente risulta, per H abbastanza grande, che dy/dt è praticamente costante e che $x = y$; cioè gli elettroni vanno al filo secondo traiettorie inclinate. Poichè bisogna considerare tutti i piani passanti per il filo, sarà $x = y \cos \vartheta$.

Se ci riallacciamo alla interpretazione dei MONTGOMERY del fenomeno degli impulsi ritardati, l'elettrone dell'unica coppia di ioni formata dal raggio incidente giungerà al filo seguendo le traiettorie stabilite da (4) e (5).

Nel nostro caso $E = 0,8$ u.e.s. e $[(H/C) d\rho/dt] \cong 0,7$ u.e.s.: il valore di $d\rho/dt$ che abbiamo usato è quello dedotto dai dati sperimentali secondo cui il tempo di salita dell'impulso in un contatore di G. M. è di qualche 10^{-7} sec. Allora la forza radiale e quella tangenziale sono confrontabili: quando il contatore è parallelo al campo la traiettoria è nettamente allungata e la probabilità di cattura dell'elettrone da una molecola O_2 cresce; quando è perpendicolare il percorso è allungato in media di un fattore circa 1,3 ed in proporzione è aumentata solo di poco la probabilità di cattura.

Questi risultati concordano con le misure riportate in tabella I.

c) *Moto dello ione positivo. Tempo di inefficienza.* — Le equazioni del moto dello ione positivo sono analoghe a quelle dell'elettrone: in esse però μ è costante e il campo E' è diverso. Con gli stessi sistemi di coordinate di prima, e ponendo

$$A = \frac{\mu V'}{\lg b/a}; \quad B = \frac{\mu H}{C},$$

nel caso di contatore parallelo al campo è

$$\begin{cases} \rho^2 - \rho_0^2 = \frac{2At}{1 + B^2}, \\ \vartheta = B \lg \frac{\rho_0}{\rho}, \end{cases}$$

nel caso di contatore perpendicolare

$$\begin{cases} y^2 - y_0^2 = \frac{2At}{1 + B^2}, \\ x = B(y - y_0). \end{cases}$$

In tabella II risulta che il rendimento di un contatore non è praticamente alterato dal campo se è posto perpendicolarmente ad esso, mentre è diminuito se è posto in direzione parallela. Dalle considerazioni e determinazioni sperimentali si è visto che questa diminuzione non è per nulla giustificata da una eventuale variazione del tempo di inefficienza, che non sussiste, e solo in parte invece essa è imputabile agli impulsi ritardati (tab. I). In *d*) daremo una interpretazione del fenomeno mentre ora riteniamo interessante notare che se nelle equazioni (6) e (7) poniamo B dell'ordine di 10^{-3} come risulta dalla mobilità ionica, il campo non porta mutamenti al tempo impiegato dagli ioni per allontanarsi dal filo. Questo tempo cresce infatti col campo in direzione sia perpendicolare che parallela di un fattore $1 + B^2$ che è praticamente uguale ad uno.

d) *Lunghezza efficace del contatore.* — In fig. 3 si riscontra una diminuzione della lunghezza efficace del contatore quando è parallelo al campo. Intuitivamente si vede che gli elettroni prodotti nella zona terminale del filo hanno una probabilità maggiore di andar a finire nella zona morta a causa dell'aumento di percorso provocato dal campo. L'ordine di grandezza del fenomeno si può dedurre dalla variazione del coefficiente di diffusione: TOWNSEND ha mostrato ⁽¹⁴⁾ che il coefficiente di diffusione in direzione parallela al campo non è alterato dal campo; in direzione perpendicolare è ridotto a

$$D_{\perp} = \frac{D_{||}}{1 + \omega^2 T^2},$$

ove $\omega = He/m$ e $T = l/U$ essendo U la velocità di agitazione.

Nel nostro caso $\omega^2 T^2$ è circa 0,6 e la variazione perciò sensibile. Quando il contatore è perpendicolare al campo il fenomeno potrebbe presentarsi, nel senso d'un allungamento della lunghezza efficace, ma in misura minore. Una indicazione a questo riguardo si potrebbe avere dal lieve aumento di rendimento nel caso del campo perpendicolare al contatore (tab. II).

4. Conclusioni.

Dovendo usare contatori in forti campi magnetici è necessario tener presenti i fenomeni che abbiamo descritto. L'aumento di frequenza degli impulsi ritardati può falsare misure fatte con alti poteri risolutivi e ancor più quelle che implicano misure di ritardi dell'ordine del μsec .

La variazione di lunghezza efficace, che è di qualche centimetro, va pure tenuta presente nelle misure in cui si vogliono confrontare risultati con campo e senza campo.

Ci è grato dovere ringraziare il prof. A. ROSTAGNI per numerose utili discussioni e consigli nel corso dell'esperienza e la SADE per le facilitazioni accordate nella fornitura dell'energia occorrente al funzionamento dell'elettromagnete.

SUMMARY

Results are related concerning the behaviour of G.M. counters in a magnetic field. A field of 8000 gauss parallel to counter axis increases the number of impulses delayed of $\sim 1 \mu\text{sec}$ and reduces the efficient length of the counter. If the field is perpendicular to the counter, above related phenomena are not observed. In neither case there is a change in the inefficiency time of the counter. The A.A. try at last to frame the obtained results in the model actually adopted for the description of the discharge in the G.M. counters.

Sulla propagazione di onde ultrasonore nei liquidi.

A. CARRELLI e F. PORRECA

Istituto di Fisica dell'Università di Napoli

(ricevuto il 28 Gennaio 1950)

Riassunto. — In questo lavoro viene esaminata, con metodo fotografico, la distribuzione dell'intensità delle strie luminose che si formano al di là di un reticolo ultrasonoro. La determinazione viene fatta per liquidi di varia viscosità, ottenendo risultati diversi, appunto al variare di tale parametro.

1. — La teoria dei reticoli ultrasonori è basata, com'è ben noto, sulla azione prodotta da un'onda di pressione che si propaga nel liquido. Questa onda di pressione per effetto di compressioni adiabatiche genera un'onda di variazione di densità; e poichè la densità μ è collegata all'indice di rifrazione n dalla relazione di LORENTZ-LORENZ, in ultima analisi per effetto di quest'onda di pressione l'indice di rifrazione di un liquido percorso da onde ultrasonore è variabile al variare del tempo e della posizione secondo un'espressione del tipo

$$\Delta n = \Delta n_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda^*} \right),$$

dove T è il periodo dell'onda ultrasonora e λ^* è la lunghezza d'onda corrispondente nel liquido che si considera.

Nel caso che si abbia un sistema di onde stazionarie l'andamento dell'indice di rifrazione è dato da una relazione del tipo

$$\Delta n = 2\Delta n_0 \cos 2\pi \left(\frac{l-x}{\lambda^*} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda^*} \right),$$

dove l è l'intervallo compreso fra la sorgente ultrasonora e la parete riflettente che permette appunto la formazione del sistema di onde stazionarie.

È ben noto a quali interessanti manifestazioni dia luogo la presenza di

questo reticolo nel liquido, manifestazioni che sono state studiate e con grande successo dal punto di vista sperimentale, nel senso che è stata effettivamente riscontrata sperimentalmente questa variazione periodica dell'indice, la quale dà luogo alla formazione di strie luminose ed oscure in una serie di piani che si trovano a diverse distanze dal campo ultrasonoro.

Ora che varie esperienze hanno dimostrato che la teoria su accennata è accettabile e che si verifica effettivamente nell'interno del liquido questa variazione periodica dell'indice di rifrazione, il che porta necessariamente a considerare il mezzo come un reticolo di fase, è interessante procedere allo studio di particolarità che possono contribuire a lumeggiare l'effettiva struttura dei liquidi.

In primo luogo è da verificare la conseguenza immediata della teoria; la presenza di un'onda variabile di pressione con la conseguente variazione dell'indice porta a prevedere una determinata distribuzione di intensità su uno dei piani di cui si è fatto cenno; è quindi da vedere in primo luogo se si ha effettivamente una distribuzione d'intensità che sia la stessa per tutti i liquidi. Bisogna infatti considerare che una qualunque distribuzione di molecole richiede per attuarsi un certo tempo di rilassamento, il quale è funzione della viscosità del liquido che si considera. Dunque può ben prevedersi una variazione della distribuzione dell'indice, specie se le frequenze sono elevate, in funzione di questo tempo di rilassamento.

Ricordando allora il meccanismo di formazione delle onde stazionarie, e il conseguente processo di formazione di particolarità ottiche, che danno origine al reticolo di fase, si comprende l'interesse che può avere lo studio della distribuzione dell'intensità delle radiazioni in un piano ad una certa distanza dal reticolo di fase prodotto dalle onde stazionarie sopra ricordate.

2. — Per lo studio sperimentale abbiamo adottato il seguente dispositivo: un oscillatore di tipo Armstrong eccitava il quarzo piezoelettrico che oscillava sulla frequenza fondamentale di $6 \cdot 10^5$ Hz. La vaschetta è di dimensioni 4×5 cm; ci si assicurava della esistenza di onde stazionarie disponendo di una lamina metallica parallela alla faccia del quarzo, che si spostava con movimenti micrometrici in modo da realizzare il massimo di nettezza del reticolo che veniva ad osservarsi. Dopo la vaschetta era disposto un sistema di lenti e precisamente un obiettivo della distanza focale di circa 70 cm. L'osservazione veniva fatta in un piano dove si otteneva il massimo di nettezza delle strie ⁽¹⁾ e queste venivano fotografate; contemporaneamente si ottenevano sulle stesse lastre le marche d'intensità secondo il metodo della scuola di Utrecht, in modo da poter trasformare gli annerimenti ottenuti sulla lastra in intensità.

(¹) F. HIEDEMANN: *Ultraschallforschung*, pag. 77 (1939).

La teoria sviluppata da LUCAS e BIQUARD ⁽²⁾ a proposito di questo reticolo di fase, prevede una certa distribuzione di intensità nell'ipotesi che l'andamento della variazione dell'indice in funzione del tempo e della posizione sia quello sinusoidale rispetto ad entrambe le variabili t ed x ; ma se la distribuzione dell'indice è diversa, si ha evidentemente una diversa distribuzione. L'oggetto della presente ricerca è appunto quello di vedere se passando da un liquido

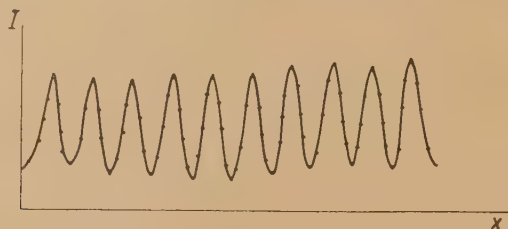


Fig. 1.

ad un altro si ha la stessa distribuzione di intensità, il che sta a significare che si può accettare la condizione che si abbia la perfetta legge sinusoidale. Le ragioni che ci spingono a ritenere probabile una distribuzione di intensità diversa da quella sinusoidale sono di due tipi: 1) il liquido compresso e rarefatto ha subito una certa modificazione, e quindi ci vuole un certo tempo di

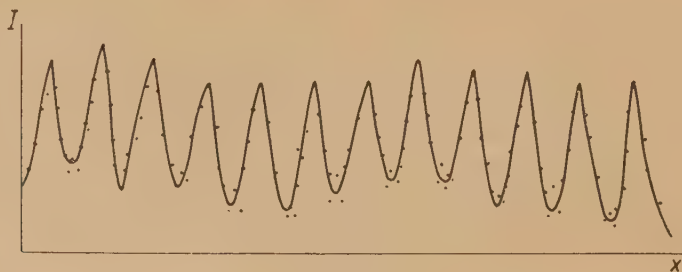


Fig. 2.

rilassamento per riportare le molecole allo stato primitivo; 2) è ammissibile che la propagazione produca modifiche nella struttura del liquido, causando così deviazioni dall'andamento sinusoidale.

Le prove sono state condotte su acqua e miscugli di acqua e glicerina di viscosità $\eta = 0,4$ e di acqua e glucosio di viscosità $\eta = 0,1$, ed infine in tetracloruro di carbonio $\eta = 0,0096$.

La fig. 1 si riferisce alla distribuzione di intensità delle strie relativa al tetracloruro di carbonio (le intensità sono riportate in una scala arbitraria); nella fig. 2 è riportata la stessa curva relativa all'acqua e fra questi due liquidi non può affermarsi che vi sia una molto grande differenza.

Passiamo ora a liquidi piuttosto viscosi e precisamente soluzione di glucosio in acqua con $\eta = 0,1$ e soluzione di glicerina in acqua con $\eta = 0,4$. I risultati relativi a queste soluzioni sono riportati in fig. 3 e 4 e, come vedesi, per queste soluzioni si nota una netta differenza nella distribuzione della intensità.

Naturalmente nel fare le fotografie si è avuta molta cura di porsi sempre nelle condizioni di massima nettezza delle frange, e cioè ci si è posti nelle condizioni per le quali si aveva la massima convergenza dei fascetti ⁽²⁾. Può sor-

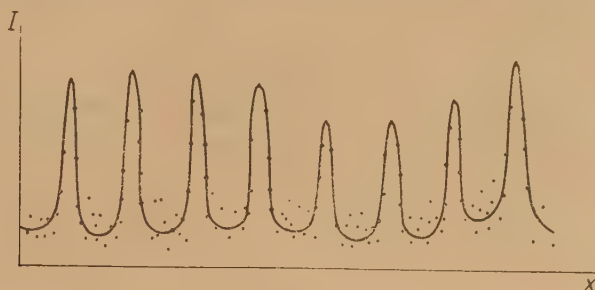


Fig. 3.

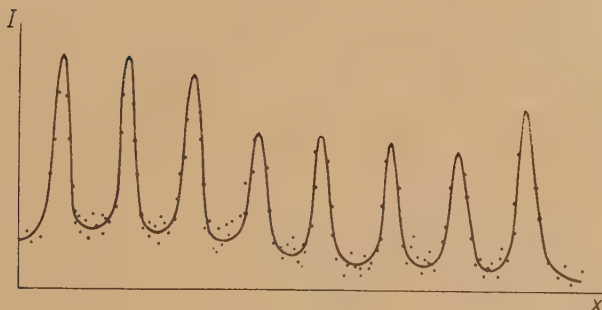


Fig. 4.

gere il dubbio che la diversità riscontrata dipenda da una diversità di ampiezza dell'onda ultrasonora. Per tale ragione sono state rifatte le fotografie dopo che tutto il dispositivo era stato completamente smontato, e sempre al massimo di nettezza delle frange, con intensità del campo ultrasonoro diverse, e precisamente in condizioni per le quali si avevano nello spettro di diffrazione in un caso due righe e nell'altro caso tre righe, il che è una prova sicura della variazione d'intensità.

In questo caso si riproducono le microfotografie non trasformando gli annerimenti in intensità e si fa notare che i tempi di posa sono stati un po' più alti in modo che si è avuto un annerimento più forte di quello relativo alle lastre utilizzate per le figg. 1, 2, 3 e 4. I risultati sono riportati nelle figg. 5 e 6

⁽²⁾ R. LUCAS e P. BIQUARD: *Journ. de Phys.*, 7, 464 (1932).

relative, rispettivamente, al tetracloruro di carbonio ed alla soluzione di glicerina in acqua. È da osservare che le intensità sono diverse, pur essendo poco diversi gli annerimenti, appunto perchè ci si trova, come già si è detto, in una zona delle curve annerimento-intensità per la quale a piccole variazioni di annerimento corrispondono cospicue variazioni di intensità.

3. - Bisogna ancora aggiungere che la teoria della formazione di queste strie porta ancora alla presenza di altri reticoli, i quali sono interpretati quali effetto dell'interferenza dei vari fasci diffratti. In base a considerazioni semplici si prevede l'esistenza di una periodicità nella comparsa di tali reticoli (¹).

Queste considerazioni possono riferirsi anche ai reticoli di ampiezza (e furono infatti verificati sperimentalmente parecchi anni or sono da WINCKELMANN), ma esse non influenzano sostanzialmente il nostro problema, che è quello di considerare la distribuzione di intensità dei vari raggi deviati dall'andamento rettilineo per azione del fascio ultrasonoro.

Le nostre fotografie e le misure corrispondenti sono relative a posizioni per le quali questa particolarità non compare, o per lo meno è molto attenuata.

Evidentemente lo scopo ultimo della ricerca sarebbe quello di determinare la variazione dall'andamento sinusoidale, ma ricordando i calcoli che permettono d'interpretare la presenza delle strie, si vede che questa via non può facilmente portare alla risoluzione di tale problema.

SUMMARY

With a photographic method, has been examined the intensity distribution of the light lines which are formed beyond a ultrasound grate. The measure is done for liquids of different viscosity and different results are obtained with the variation of this parameter.

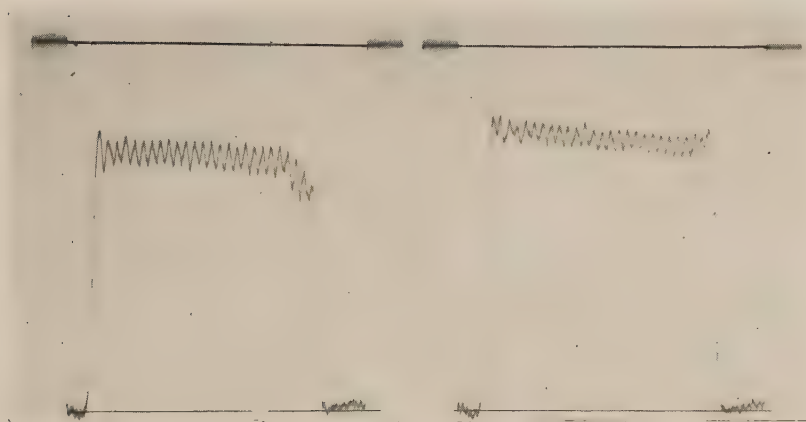


Fig. 5.

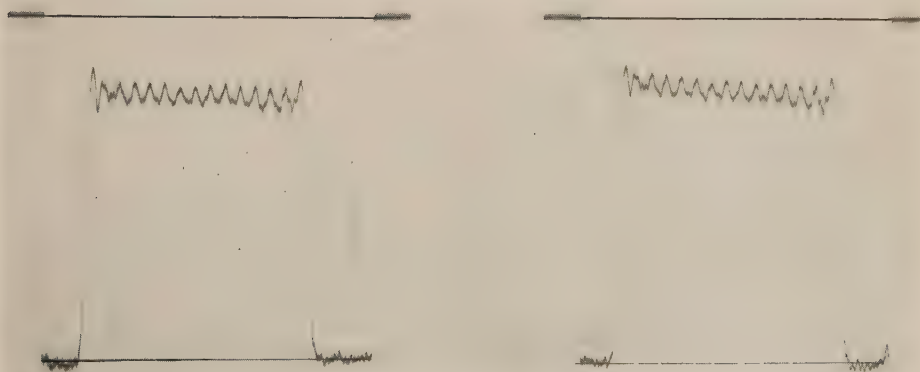


Fig. 6.

Effetto di transizione della radiazione che genera le stelle.

N. DALLAPORTA, M. MERLIN e G. PUPPI

Istituto di Fisica dell'Università di Padova

Centro del C.N.R. per gli ioni veloci

(ricevuto il 31 Gennaio 1950)

Riassunto. — Si cerca di interpretare l'effetto di transizione della radiazione nucleonica nelle lastre come dovuto essenzialmente a neutroni secondari generati in processi evaporativi nel materiale condensato che circonda le lastre. Il calcolo si fonda unicamente su dati o relazioni desunte dall'esperienza. I risultati ottenuti rispecchiano il corretto ordine di grandezza.

1. — Introduzione.

È stato segnalato da vari autori ⁽¹⁾ un debole effetto di transizione presentato dalla radiazione che genera le stelle quando essa venga assorbita in materiali condensati. Il fatto che il detto effetto si presenti piuttosto debole rende la sua osservazione dubbia in quelle esperienze in cui non si possa ridurre notevolmente gli errori statistici. Ci sembra però che le notizie esistenti unite a quelle fornite in un lavoro di prossima pubblicazione in corso in questo Istituto ⁽²⁾, consentano di affermare che un tale effetto esiste ed è confinato essenzialmente nelle stelle di pochi rami. Esso si presenta come un aumento, nei primi spessori di materiale, del numero di stelle, e quindi del numero di particelle responsabili delle stelle medesime, rispetto all'andamento previsto nella ipotesi di un assorbimento esponenziale, andamento questo estrema-

⁽¹⁾ G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Phys. Rev.*, **74**, 845 e 1878 (1948); G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nature*, **165**, 992 (1949); M. SCHEIN: Comunicazione privata; P. FREIER, P. NEY e F. OPPENHEIMER: *Phys. Rev.*, **75**, 1451 (1949).

⁽²⁾ L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **7**, 145 (1950).

mente probabile poichè si tratta essenzialmente di fenomeni di bassa energia. Una circostanza, che a prima vista può riuscire difficile da interpretare, sta nel fatto che gli spessori che intervengono in detto effetto equivalgono alle decine di g/cm^2 e quindi si differenziano per un ordine di grandezza da quelli che sono gli spessori relativi alle lunghezze caratteristiche di assorbimento della radiazione che produce le stelle. Questo stesso fatto d'altra parte ci ha indotti a considerare l'andamento della curva di transizione come essenzialmente regolato dalle condizioni geometriche della esperienza, pur essendo il fenomeno stesso da considerarsi come un vero e proprio effetto di transizione causato dalla riproduzione parziale entro il materiale condensato della radiazione che genera le stelle.

In altre parole la situazione sarebbe la seguente: dalla radiazione che entra nel blocco di materiale, in cui sono immerse le lastre, e che chiameremo radiazione primaria vengono generate nel blocco stesso un certo numero di stelle per cm^3 e per giorno; in queste stelle, le particelle cariche (neutroni, protoni, deutoni, particelle α) emesse nel processo evaporativo, date le energie in esame, verranno generalmente arrestate dopo un percorso brevissimo; mentre i neutroni compiranno dei percorsi perfettamente confrontabili ed anzi in generale superiori alle dimensioni lineari del blocco assorbitore, il quale nel suo complesso si presenta quindi come un radiatore di neutroni secondari; anche le lastre collocate nel blocco verranno irradiate da questo flusso e in esse si creeranno un certo numero di stelline essenzialmente di pochi rami, stante la degradazione di energia che si manifesta nel processo evaporativo tra l'energia del primario e l'energia delle particelle di evaporazione. Se le dimensioni del blocco assorbitore si mantengono piuttosto limitate come di consueto (decina di centimetri), grosso modo le lastre appoggiate sopra il blocco saranno irraggiate da un flusso metà (angolo solido 2π) del flusso che irradia le lastre completamente immerse nel blocco. In una prima grossolana approssimazione che non tiene conto nè dell'assorbimento progressivo della radiazione primaria, nè dell'assorbimento dei neutroni secondari, l'effetto in esame consisterebbe dunque essenzialmente, se si tolgono i primissimi spessori (dell'ordine del cm) in cui le questioni di angolo solido diventano preponderanti, in uno spostamento di tutti i valori relativi alle lastre immerse per un contributo costante. In realtà, tenendo nel debito conto i vari fattori di assorbimento, la questione diventa più complicata. Che però qualitativamente l'effetto essenziale sia lo spostamento del punto zero lo prova il fatto che le lastre appoggiate sopra il blocco contengono più stelle a tre rami delle lastre controllo completamente esterne e meno delle lastre di poco immerse ⁽²⁾.

Su queste premesse svolgeremo le nostre considerazioni fondandoci su condizioni standard che si avvicinano a quelle usate nel lavoro in corso in questo Istituto ⁽²⁾; riteniamo che esse siano immediatamente applicabili anche a casi analoghi.

Certamente il contributo da noi esaminato non sarà l'unico sensibile per l'effetto di transizione. Come è stato osservato da BERNARDINI e coll., nel passaggio tra aria e materiale condensato vi è una condizione favorevole all'aumento delle stelle generate da mesoni σ delle quali stelle una frazione sensibile è composta di stelle a tre rami ⁽³⁾; nelle lastre più profonde ci sarà anche da tenere conto del contributo portato da particelle veloci generate nel materiale condensato in processi non evaporativi (particelle di sciame) ⁽⁴⁾. Noi ci limiteremo a far vedere come l'azione dovuta ai processi evaporativi, certamente essenziale per i primi spessori, sia del corretto ordine di grandezza richiesto.

2. - Spettro differenziale dei neutroni secondari.

Ci proponiamo ora di calcolare lo spettro differenziale dei neutroni secondari, responsabili dell'effetto di transizione. A tale scopo considereremo le lastre fotografiche come indicatori del tipo di stelle che si generano in un materiale condensato e della loro frequenza. Più precisamente ammetteremo, secondo quanto è suggerito dalla esperienza, che la frequenza delle stelle (per cm^3 e per giorno) che si formano in una lastra ⁽⁵⁾ sia rappresentabile con una legge del tipo

$$(1) \quad F(n_i) dn_i = B_{\text{Ge}} h' \exp [-kn_i] dn_i,$$

dove n_i indica il numero di rami ionizzanti della stella.

Quando n_i non sia troppo piccolo supporremo ⁽⁴⁾ che il numero totale di particelle evaporate n_0 sia legato al numero di particelle ionizzanti n_i dalle relazioni

$$n_0 = n_i \frac{N' + Z'}{Z'}, \quad h'n_i = hn_0$$

(N' , Z' numero di neutroni e protoni contenuti nel nucleo medio di gelatina che discende dalla composizione nucleare dell'elemento in cui la stella si è formata). Ammetteremo che la relazione sperimentale (1), valida per le stelle

⁽³⁾ C. M. LATTES, G. P. S. OCCHIALINI e C. F. POWELL: *Nature*, **160**, 486 (1947); D. H. PERKINS: *Phil. Mag.*, **40**, 601 (1949); F. L. ADELMAN e S. B. JONES: *Phys. Rev.*, **75**, 1468 (1949); G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 456 (1949).

⁽⁴⁾ R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).

⁽⁵⁾ E. P. GEORGE e A. C. JASON: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 243 (1949).

generate in gelatina, si possa scrivere anche per le stelle generate nel piombo nel modo seguente

$$(2) \quad F(n_0) dn_0 = B_{\text{Pb}} h \exp(-hn_0) dn_0,$$

dove il legame tra B_{Pb} e B_{Ge} , dovendosi rappresentare un numero di stelle per cm^2 e per giorno sarà del tipo seguente

$$(2') \quad B_{\text{Pb}} = B_{\text{Ge}} \frac{\sigma_{\text{Pb}}}{\sigma_{\text{Ge}}} \frac{\nu_{\text{Pb}}}{\nu_{\text{Ge}}},$$

essendo σ_{Pb} e σ_{Ge} rispettivamente le sezioni geometriche del nucleo di Pb e del nucleo medio di gelatina, ν_{Pb} e ν_{Ge} i relativi numeri di nuclei per unità di volume nei due materiali.

Abbiamo invece conservato h identico nei due casi perchè dal materiale sperimentale attualmente noto ⁽⁵⁾ non risulta esservi deformazioni della relazione (1) in lastre sotto vari spessori di materiali differenti. Il coefficiente h invece dipende in modo essenziale dal grado di sensibilità della lastra; meno la lastra è sensibile e più la condizione è sfavorevole per le stelle con molti rami; la migliore riprova di tale fatto sta nella enorme dispersione dei dati sperimentali. Siccome il nostro calcolo dipenderà da h in modo piuttosto sensibile, non ci si potrà attendere da esso che un grossolano ordine di grandezza. Lo abbiamo eseguito col valore di $h = 0,12$ ($h' = 0,27$).

In queste stelle interessa sapere la distribuzione energetica dei neutroni emessi per evaporazione e per questo è necessario possedere una relazione che leghi l'energia media perduta da un nucleo per evaporare una particella quando la energia di eccitazione del nucleo stesso è nota. Abbiamo desunto tale relazione dai risultati sperimentali del gruppo di Bristol ⁽⁴⁾; dai dati di questi ricercatori (pag. 881, tab. III, lavoro citato), risulta che un nucleo che possiede una energia di eccitazione E evapora un numero totale di particelle n dato dalla relazione:

$$(3) \quad E = A(n + \alpha)^2,$$

dove $A = 1 \text{ MeV}$ e $\alpha = 7,5$.

Si ricava subito operando per differenze finite la espressione seguente per la energia media di una particella perduta per evaporazione

$$(4) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta E}{\Delta n} = 2\sqrt{AE} - A.$$

Supporremo la probabilità che la energia perduta sia ε in luogo di $\bar{\varepsilon}$ descritta dalla formula di WEISSKOPF, che sembra ben verificata ⁽³⁾

$$(5) \quad P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\varepsilon - U}{T^2} \exp\left[-\frac{\varepsilon - U}{T}\right] d\varepsilon,$$

ove U rappresenta la energia media di legame della particella evaporata e la quantità T è legata alla $\bar{\varepsilon}$ dalla relazione ben nota

$$(6) \quad \bar{\varepsilon} = 2T + U.$$

Pensando che la particella di cui ci stiamo occupando sia la r -esima che viene evaporata da un nucleo d'energia di eccitazione E_0 che ne evapora in totale n_0 , avremo:

$$n_0 - n = \sqrt{\frac{E_0}{\alpha}} - \sqrt{\frac{E}{\alpha}} = r, \quad \text{da cui} \quad \sqrt{E} = \sqrt{A}(n_0 + \alpha - r)$$

e ricorrendo alla (4) potremo scrivere la (5):

$$P(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\varepsilon - U}{A^2 \left(n_0 + \alpha - r - \frac{1}{2} - \frac{U}{2A} \right)^2} \exp \left[- \frac{\varepsilon - U}{A \left(n_0 + \alpha - r - \frac{1}{2} - \frac{U}{2A} \right)} \right] d\varepsilon.$$

Per passare allo spettro totale delle particelle emesse bisognerebbe calcolare la probabilità di emissione di particelle con energia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_n$ sotto la condizione $\sum \varepsilon_i = E_0$. Ma poichè ci interessano solo i neutroni, semplifichiamo il problema considerando le singole emissioni di neutroni come indipendenti. Lo spettro differenziale dei neutroni emessi da una stella formata in totale da n_0 particelle di evaporazione sarà quindi dato da:

$$N(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N}{N + Z} \frac{E - U}{A^2} d\varepsilon \sum_{r=1}^{n_0} \frac{1}{\left(n_0 + \alpha - r - \frac{1}{2} - \frac{U}{2A} \right)^2} \times \\ \times \exp \left[- \frac{\varepsilon - U}{A \left(n_0 + \alpha - r - \frac{1}{2} - \frac{U}{2A} \right)} \right]$$

(N e Z numero di neutroni e protoni di un nucleo di Pb), che con la trasformazione della sommatoria in integrale diventa subito:

$$N(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N}{N + Z} \frac{d\varepsilon}{A} \left\{ \exp \left[- \frac{\varepsilon - U}{A \left(n_0 + \alpha - r - \frac{3}{2} - \frac{U}{2A} \right)} \right] - \right. \\ \left. - \exp \left[- \frac{\varepsilon - U}{A \left(\alpha - \frac{1}{2} - \frac{U}{2A} \right)} \right] \right\}.$$

Per il problema che interessa bisognerà mediare questa espressione sulla

funzione $F(n_0)$. Il numero totale di neutroni secondari di energia $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ generati nei processi evaporativi in Pb per cm^3 e per giorno risulterà dato da:

$$\mathfrak{N}_0(\varepsilon) d\varepsilon = d\varepsilon \int_{n_\varepsilon}^{\infty} N(\varepsilon) F(n_0) dn_0,$$

dove $n_\varepsilon = \sqrt{(\varepsilon/A)} - \alpha$ è il numero di gambe corrispondenti all'energia ε .

Posto

$$y(\varepsilon) = \int_{n_\varepsilon}^{\infty} \exp \left[- \frac{\varepsilon - U}{A \left(n_0 + \alpha - \frac{3}{2} - \frac{U}{2A} \right)} + hn_0 \right] dn_0 - \\ - \frac{1}{h} \exp \left[- \frac{\varepsilon - U}{A \left(\alpha - \frac{1}{2} - \frac{U}{2A} \right)} + hn_\varepsilon \right],$$

possiamo in definitiva scrivere

$$\mathfrak{N}_0(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{N}{N + Z} \frac{B_{\text{Pb}} h}{A} y(\varepsilon) d\varepsilon.$$

La distribuzione spaziale si assume isotropa.

3. - Valutazione del fattore geometrico.

In quanto precede abbiamo calcolato lo spettro dei neutroni secondari evaporati localmente in seno al materiale condensato; il coefficiente che compare nelle formule ricavate deve pertanto considerarsi come una funzione della intensità locale della componente primaria. Nei problemi concreti, per calcolare la dipendenza di B_{Pb} dalla posizione entro il blocco di materiale assorbente, bisognerebbe conoscere lo spettro della componente primaria e la sua dipendenza zenitale. Tutto questo è poco noto e noi ovvieremo a tale difficoltà assumendo per la B_{Pb} un andamento dipendente dalla profondità nel blocco del tipo

$$B_{\text{Pb}} = I_{\text{Pb}} \exp [-\alpha z]$$

(α = coefficiente di assorbimento della primaria che si assume $\approx 300 \text{ g/cm}^2$), andamento indicato dalle lastre stesse e che supporremo sufficientemente approssimato.

Consideriamo ora un elemento di superficie ΔS di una lastra, a profondità z_0 in seno al blocco, irraggiata da un elemento di volume $dx dy dz$ a distanza r ; diciamo $\Delta\Omega$ l'angolo solido sotto cui dall'elemento di volume irraggiante si

vede l'elemento di superficie. Il flusso di neutroni (per giorno) attraverso la superficie considerata sarà ovviamente

$$\mathcal{V}(\varepsilon) d\varepsilon dx dy dz \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \exp[-\gamma r],$$

(γ = coefficiente di assorbimento dei neutroni secondari nel Pb che prenderemo $\overline{\sigma} 140$ g/cm²), ove essendo θ l'angolo formato dalla congiungente i due elementi con la normale alla superficie, si ha per l'angolo solido

$$\Delta\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta S \cos \theta}{\pi r^2}}} \right).$$

Per passare al numero di stelle per giorno create da questo flusso, dovremo moltiplicare la espressione precedente per la probabilità che un neutrone, compiendo nella lastra di spessore d il percorso $d/\cos \theta$ crei una stella e cioè per

$$\nu_{\text{Ge}} \sigma_{\text{Ge}} \frac{d}{\cos \theta}$$

ed integrare su tutto il volume del blocco irraggiante. Avremo così:

$$\nu_{\text{Ge}} \sigma_{\text{Ge}} \frac{d}{2} \frac{N}{N+Z} \frac{I_{\text{Pb}} h}{A} y(\varepsilon) d\varepsilon \int \frac{\exp[-\alpha z - \gamma r]}{\cos \theta} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta S \cos \theta}{\pi r^2}}} \right) dx dy dz.$$

Dividendo per ΔS e ponendo:

$$\mathcal{F}(z_0) = \frac{1}{\Delta S} \int \frac{\exp[-\alpha z - \gamma r]}{\cos \theta} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta S \cos \theta}{\pi r^2}}} \right) dx dy dz,$$

l'espressione precedente diventa

$$\nu_{\text{Ge}} \sigma_{\text{Ge}} \frac{d}{2} \frac{N}{N+Z} \frac{I_{\text{Pb}} h}{A} \mathcal{F}(z_0) y(\varepsilon) d\varepsilon,$$

che rappresenta il numero di stelle create per cm² di lastra e per giorno da neutroni secondari di energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$.

Non tutte le stelle prodotte da questi neutroni hanno un numero di rami ionizzanti sufficiente per poter essere osservate. Poichè generalmente l'analisi delle stelline si riferisce ad un numero di rami ionizzanti ≥ 3 , dovremo introdurre certe funzioni

$$p_n(\varepsilon)$$

rappresentanti la probabilità che un nucleo che cattura un neutrone di energia $\varepsilon - U$, e che pertanto acquista una energia di eccitazione ε , evapori proprio n_i particelle ionizzanti.

È possibile ora ottenere il numero delle stelline per cm^2 di lastra con rami ionizzanti prodotte dai neutroni secondari in una lastra a profondità z_0 tramite la espressione

$$\nu_{\text{Pb}}\sigma_{\text{Pb}}I_{\text{Ge}} \frac{N}{N+Z} \frac{hd}{2A} \mathcal{F}(z_0) \int_0^\infty p_n(\varepsilon)y(\varepsilon) d\varepsilon,$$

essendo per la (2')

$$\nu_{\text{Ge}}\sigma_{\text{Ge}}I_{\text{Pb}} = \nu_{\text{Pb}}\sigma_{\text{Pb}}I_{\text{Ge}}.$$

Notiamo ancora che per passare da questa espressione all'effetto percentuale dovremo ovviamente dividere per la quantità

$$I_{\text{Ge}} h' \exp[-\alpha z_0] \exp[-h' n_i],$$

che rappresenta il numero di stelline ad n_i rami ionizzanti create direttamente dalla primaria nella lastra in esame. La figura schematica riportata di fianco mostra come il detto effetto percentuale sia dato dal rapporto

$$\frac{AB}{BC}.$$

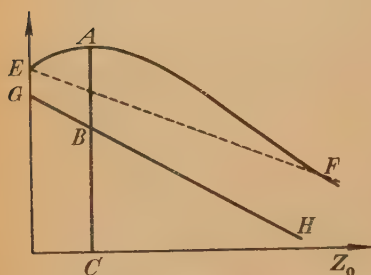


Fig. 1.

4. - Confronto coi dati sperimentali e conclusioni.

Nel calcolo esplicito abbiamo valutato numericamente la funzione per varie profondità delle lastre nel blocco. Essa è strettamente dipendente dalla geometria impiegata; l'abbiamo valutata numericamente per un blocco standard con base circolare di 256 cm^2 e altezza di $15,5 \text{ cm}$; i valori di $\mathcal{F}(z_0)$ sono riportati nella tabella I per varie profondità delle lastre poste sull'asse del cilindro.

TABELLA I.

z_0	$\mathcal{F}(z_0)$	f_3 (%)	f_4 (%)	f_5 (%)	f_t (%)
0	6,4	7,5	2,7	0,9	2,9
1,25	8,66	10,7	3,9	1,2	4,1
2,5	9,70	12,6	4,6	1,5	4,8
5	10,44	14,9	5,4	1,8	5,7
8	10,06	16,0	5,8	1,9	6,2
14	6,72	13,4	4,9	1,6	5,2

Anche la funzione $y(\varepsilon)$ è stata valutata numericamente. Per quanto riguarda la scelta delle funzioni $p_n(\varepsilon)$ ci siamo valse delle formole (6) che legano, con dipendenza Poissoniana, la probabilità del numero di rami ionizzanti voluto n col numero medio di rami ionizzanti $m_i(\varepsilon)$ relativo alla energia di eccitazione ε e cioè

$$p_n(\varepsilon) = \exp[-m_i(\varepsilon)] \frac{\overline{m_i(\varepsilon)}^n}{n!}.$$

La funzione $m_i(\varepsilon)$ è stata poi calcolata mediante le formole del lavoro citato (*) che sono in accordo con la esperienza e precisamente

$$m_i(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon - U_P)^4}{(\varepsilon - U_P)^4 + (\varepsilon - U_N)^4} \lg \frac{\frac{k\varepsilon + U}{U}}{\lg \frac{1}{1-k}},$$

dove $k = 4/10$ ed U_P e U_N sono le energie di legame medie per un protone ed un neutrone, e valgono rispettivamente 14 MeV e 8 MeV.

Nella tabella I sono state riportate per le varie profondità, oltre al fattore geometrico $F(z_0)$, gli effetti percentuali f_3, f_4, f_5 delle stelle a 3, 4, 5 rami e l'effetto totale f_t .

I risultati indicano per le stelle a tre rami un effetto relativo del 15 % in accordo coi risultati sperimentali, ed un effetto globale del 6 %; si comprende come questo effetto globale sia difficile da mettere in evidenza al di fuori delle fluttuazioni statistiche.

Come già precedentemente accennato, il risultato dipende in maniera molto sensibile dal coefficiente h' . Una variazione di h' da 0,27 a 0,33 porta grosso modo a dimezzare l'effetto nelle stelle a tre rami. Pensiamo che le altre cause, citate nella introduzione, efficienti per la produzione di stelline secondarie, non forniscano un contributo superiore a quello ora calcolato, e ciò in accordo con la stima fatta da BERNARDINI e coll. del limite superiore del 10 % per il contributo dei mesoni σ . Il contributo delle particelle in sciame, stante la loro direzionalità (4), non potrà alterare la stima precedente almeno per quanto riguarda i piccoli spessori. È questo un argomento sul quale pensiamo di ritornare. Come ultima osservazione vogliamo notare come la sottrazione alle misure globali del contributo dovuto all'effetto di transizione permetta di ridurre il valore attualmente accettato per il cammino di assorbimento in Pb della primaria, che generalmente si deduce dalla pendenza apparente EF (vedi

(*) E. CLEMENTEL e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 494 (1949).

figura) mentre in realtà sarà dato dalla pendenza vera GH , o in altre parole, permetta di ridurre il fattore di trasparenza nucleare.

Pensiamo però che qualsiasi maggiore precisazione in proposito sia prematura.

Desideriamo ringraziare vivamente il prof. A. ROSTAGNI per numerose discussioni avute sull'argomento.

SUMMARY

An attempt of interpreting the transition effect of nucleonic radiation in nuclear plates is given. The effect is considered as mainly due to secondary neutrons generated in evaporative processes in the condensed material surrounding the plates. The problem is considered from the phenomenological point of view based on experimental relations. The results obtained are of the right order of magnitude.

Sullo spettro di generazione dei mesoni.

E. CLEMENTEL

Istituto di Fisica dell'Università di Padova

(ricevuto il 10 Febbraio 1950)

Riassunto. — Assumendo una sezione d'urto dipendente solo dalle energie relative, si calcolano nell'ipotesi della produzione plurima lo spettro di generazione dei mesoni e dei nucleoni secondari quando un nucleone primario urta un nucleo composto. La frequenza degli sciami penetranti che segue da questi spettri è compatibile con i risultati sperimentali.

1. — Introduzione.

È noto che nell'urto nucleone-nucleone ha luogo, per energie superiori ad un valore minimo, produzione di mesoni, produzione singola secondo HEITLER ⁽¹⁾ per la forte reazione (damping) del campo mesonico creato sulla sorgente (nucleoni), produzione multipla secondo HEISENBERG ⁽²⁾, il quale considera il damping come conseguenza dell'emissione di più mesoni in un solo atto elementare. Come tale il damping non può impedire un processo multiplo, in quanto ne è effetto, ma solo limitarne la molteplicità. Questa limitazione si deve riflettere in una decrescenza abbastanza rapida della sezione d'urto per i processi di ordine superiore, in accordo colla teoria svolta da DALLAPORTA ⁽³⁾ e successivamente applicata con soddisfacenti risultati alla componente mesonica ⁽⁴⁾.

Ciò che si osserva sperimentalmente, sia con contatori che con lastre fotografiche, non è il risultato dell'urto elementare nucleone-nucleone, ma quello

⁽¹⁾ W. HEITLER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 113 (1949).

⁽²⁾ W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **126**, 569 (1949).

⁽³⁾ N. DALLAPORTA: *Rend. Acc. Lincei*, **6**, 784 (1947).

⁽⁴⁾ E. CLEMENTEL e N. DALLAPORTA: *Nuovo Cimento*, **4**, 235 e 298 (1948).

dell'urto di un nucleone con un nucleo complesso, O e N nell'atmosfera, C, O, N, Ag, Br nelle emulsioni fotografiche. Mentre dal punto di vista della produzione multipla questa complicazione sembra modificare i risultati ottenuti nel caso dell'urto elementare per un fattore dell'ordine dell'unità ⁽⁵⁾, con la produzione singola ha luogo secondo JANOSSY ⁽⁶⁾ una successione di urti, che realizzano la cosiddetta produzione plurima, con conseguente emissione di più mesoni e, se l'energia del nucleone incidente è sufficientemente elevata, un processo a cascata nel nucleo, dovuto ai nucleoni di rinculo che accompagnano ogni atto di produzione mesonica e in grado a loro volta di produrre nuovi mesoni e nucleoni secondari.

Assumendo una sezione d'urto per produzione di mesoni dipendente solo dal rapporto fra l'energia del primario e la perdita di energia in un singolo atto, HEITLER e JANOSSY ⁽⁷⁾ hanno calcolato, nell'ipotesi dell'indipendenza statistica dei singoli eventi di emissione, la frequenza degli sciami penetranti in funzione del numero n di particelle ionizzanti (mesoni e protoni), dando un andamento in buon accordo con i risultati sperimentali di POWELL e collaboratori relativi alla frequenza delle stelle con un dato numero n di « thin tracks », di tracce cioè dovute a particelle con energia uguale o superiore a quella corrispondente a 1,5 volte il minimo di ionizzazione.

Scopo della presente nota è di calcolare nell'ipotesi della produzione plurima lo spettro di generazione dei mesoni tenendo conto del contributo dei nucleoni secondari, per confrontare i risultati che ne derivano con quelli dell'analogo spettro valido per la produzione multipla, e per vedere se tale confronto consente di decidere sul campo di validità delle due teorie.

2. - Spettro dei nucleoni secondari.

Assumeremo come probabilità per la creazione di un mesone di energia ε , $d\varepsilon$ e di un nucleone di rinculo η , $d\eta$ in un elemento dx di materia nucleare da parte di un nucleone di energia E un'espressione del tipo ⁽⁷⁾

$$(1) \quad \Phi(E, \varepsilon, \eta) d\varepsilon d\eta dx = f(E, \varepsilon) \varphi(E, \eta) d\varepsilon d\eta dx = \\ = k_A \left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\eta}{E}\right)^\beta \frac{d\varepsilon}{E} \frac{d\eta}{E} dx,$$

dipendente cioè solo dai rapporti ε/E ed η/E . Quanto agli esponenti α e β porremo senz'altro $\alpha = \beta = 1$ non solo per ragioni di semplicità, ma anche

⁽⁵⁾ W. HEISENBERG: *Congresso di Como*, Sett. 1949.

⁽⁶⁾ L. JANOSSY: *Phys. Rev.*, **64**, 345 (1943).

⁽⁷⁾ W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Roy. Soc.*, **62**, 669 (1949).

perchè i dati sperimentali ⁽⁸⁾ suggeriscono una certa simmetria fra nucleoni e mesoni nel processo di produzione. La sezione d'urto (1) ha un valore praticamente costante fino ad un'energia critica E_c , quindi decresce in modo rapido. Noi schematizzeremo il problema ponendola uguale a zero per $E < E_c$, che è dell'ordine dell'energia di taglio del campo magnetico.

Usando come unità per il percorso x il diametro d_A del nucleo urtato, la costante k_A resta definita dalla condizione

$$(2) \quad A = \int_0^E d\varepsilon \int_0^{E-\varepsilon} \Phi(E, \varepsilon, \eta) d\eta = \frac{5}{24} k_A = N d_A \Phi_0,$$

con N numero di nucleoni per cm^3 e Φ_0 sezione d'urto geometrica dei nucleoni. Con $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ cm e $\pi = 286$ m si ha $\Phi_0 = 3,88$ ($\hbar/\pi c^2$). Con i valori 0,95 e 1,9 della costante $N d_A (\hbar/\pi c^2)$ rispettivamente per l'ossigeno e per l'argento, si hanno in corrispondenza per k_A i valori 17,72 e 35,44 ⁽⁹⁾.

Se indichiamo ora con $\mathcal{S}(E, x) dE$ il numero di nucleoni di energia E , dE a profondità x e dovuti ad un nucleone primario di energia E_0 , per la funzione $\mathcal{S}(E, x)$ vale l'equazione di diffusione

$$(3) \quad \frac{\partial \mathcal{S}(E, x)}{\partial x} = -\mathcal{S}(E, x) \int_0^E f(E, \varepsilon) d\varepsilon \int_0^{E-\varepsilon} \varphi(E, \eta) d\eta + \\ + \int_0^\infty \mathcal{S}(E', x) dE' \int_0^{E'-E} f(E', \varepsilon) \varphi(E', E) d\varepsilon + \\ + \int_0^\infty \mathcal{S}(E', x) dE' \int_0^{E'-E} f(E', \varepsilon) \varphi[E', E' - E - \varepsilon] d\varepsilon,$$

dove i termini a secondo membro tengono conto rispettivamente dei nucleoni che escono dall'intervallo energetico E , dE , dei nucleoni che possedendo l'energia $E' > E$ cedono in un urto ad un altro nucleone l'energia E , dE ed infine dei nucleoni che in un urto degradano dal livello E' al livello E , dE .

Per le ipotesi fatte sulla (1), l'equazione (3) vale solo per $E > E_c$. Posto

$$B \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{1}{E'} = \int_0^{E'-E} f(E', \varepsilon) [\varphi(E', E) + \varphi(E', E' - E - \varepsilon)] d\varepsilon,$$

⁽⁸⁾ G. ROCHESTER: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 20 (1949).

⁽⁹⁾ È chiaro che avendo misurato le sezioni d'urto in unità $(\hbar/\pi c^2)$, le energie vanno misurate in unità $\pi c^2 = 1,46 \cdot 10^8$ eV.

tenendo conto della (2) la (3) si scrive

$$(3') \quad \frac{\partial \mathcal{S}(E, x)}{\partial x} = -A\mathcal{S}(E', x) + \int_E^\infty \mathcal{S}(E', x) B \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'},$$

da cui moltiplicando per E^s ed integrando su E fra 0 ed ∞

$$(4) \quad \frac{\partial M(s, x)}{\partial x} = -[A - W(s)]M(s, x) = -\lambda(s)M(s, x),$$

dove

$$M(s, x) = \int_0^\infty E^s \mathcal{S}(E, x) dE, \quad W(s) = \int_0^1 B(z)(1-z)^s dz.$$

Con la condizione iniziale:

$$\mathcal{S}(E, 0) = \delta(E - E_0),$$

l'integrale della (4) è

$$M(s, x) = E_0^s \exp[-\lambda(s)x],$$

da cui per la nota formula di inversione

$$(5) \quad \mathcal{S}(E_0, E, x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{E} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \exp[-\lambda(s)x] ds.$$

Dobbiamo ora mediare la (5) sulla variabile x e sull'energia iniziale E_0 . Da semplici considerazioni geometriche segue che la probabilità di un cammino x è $2x dx$; come spettro incidente assumeremo il solito spettro del tipo $E^{-(\gamma+1)}$ normalizzato ad uno, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(E) &= \int_E^\infty \gamma E_0^\gamma E_0^{-(\gamma+1)} dE_0 \int_0^1 2x \mathcal{S}(E_0, E, x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{2}{E} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{\gamma}{\gamma - s} \left(\frac{E_0}{E} \right)^\gamma \left\{ \frac{1}{\lambda^2(s)} - \frac{[\lambda(s) - 1] \exp[-\lambda(s)]}{\lambda^2(s)} \right\} ds. \end{aligned}$$

L'integrale si calcola col residuo in $s = \gamma$ e quindi il risultato è

$$(6) \quad \mathcal{S}(E) dE = 2\gamma \left\{ \frac{1}{\lambda^2(\gamma)} - \frac{[\lambda(\gamma) - 1] \exp[-\lambda(\gamma)]}{\lambda^2(\gamma)} \right\} \left(\frac{E_0}{E} \right)^\gamma \frac{dE}{E}.$$

Con una sezione d'urto del tipo (1) e $\alpha = \beta = 1$ si ottiene per $\lambda(\gamma)$ l'espressione

$$(7) \quad \lambda(\gamma) = A - W(\gamma) = k_A \left\{ \frac{5}{24} - \left[\frac{2}{3(\gamma + 1)} - \frac{1}{\gamma + 3} + \frac{1}{3(\lambda + 4)} \right] \right\}.$$

Per $E < E_c$ il primo termine a secondo membro della (3) non ha significato, in quanto per le ipotesi fatte i nucleoni non possono più perdere energia per urti radiativi. Al disotto di E_c intervengono invece i processi elastici. Un nucleone di energia cinetica E perde ora per urti elastici in un percorso x l'energia $(^{10})$

$$(8) \quad \Delta E = 5,28 \cdot 10^{-3} A^{1/3} M c^2 \left[1 + \frac{(M c^2)^2}{E(E + 2 M c^2)} \right] x,$$

perdita che per $A = 95$ e $x = 1$ diventa dell'ordine dell'energia cinetica iniziale intorno ai 100 MeV. Ciò significa che i processi elastici non contribuiscono praticamente alla produzione secondaria e possiamo quindi calcolare la distribuzione $S(E, x) dE$ dei nucleoni con $E < E_c$ mediante la

$$(9) \quad \frac{\partial S(E, x)}{\partial x} = \int_{E_c}^{E_0} \mathcal{S}(E_0, E, x) B \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'},$$

salvo alterare lo spettro che otterremo per la quantità $x \Delta x$, con x cammino medio di un nucleone secondario nel nucleo $(^{11})$.

Introducendo nella (9) la (5) e mediando sul percorso x e sull'energia iniziale E_0 si ha

$$S(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} ds \int_{E_c}^{\infty} \gamma E_c^\gamma E_0^{-(\gamma+1-s)} dE_0 \int_{E_c}^{E_0} B \left(\frac{E' - E}{E'} \right) \frac{dE'}{E'^{s+2}} \int_0^1 2x dx \int_0^x \exp[-\lambda(s)x] dx,$$

dove si è imposto la condizione iniziale $S(E, 0) = 0$.

Le integrazioni sono elementari ed il risultato è

$$(10) \quad S(E) dE = \frac{\gamma}{\lambda(\gamma)} \left\{ \frac{\lambda^2(\gamma) - 2}{\lambda^2(\gamma)} + \frac{2[\lambda(\gamma) + 1] \exp[-\lambda(\gamma)]}{\lambda^2(\gamma)} \right\} \times \\ \times \frac{k_A}{E_c} \left\{ \frac{2}{3(\gamma + s)} - \frac{1}{\gamma + 3} \left(\frac{E}{E_c} \right)^2 + \frac{1}{3(\gamma + 4)} \left(\frac{E}{E_c} \right)^3 \right\} dE.$$

Anche in questo caso l'integrazione in campo complesso si calcoli col residuo in $s = \gamma$. Si noterà che per $E = E_c$ non è $\mathcal{S}(E_c) = S(E_c)$, ma $\mathcal{S}(E_c) < S(E_c)$: questa discontinuità è dovuta alla schematizzazione nell'andamento della sezione d'urto (1), e verrebbe eliminata facendo tendere la (1) con continuità a zero per $E < E_c$. Il senso della disuguaglianza è chiaro qualora si osservi che nella (9), a differenza della (3), a secondo membro si ha solo la funzione sorgente.

$(^{10})$ L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (1948), pag. 263.

$(^{11})$ E. BAGGE: *Ann. Phys.*, **39**, 535 (1941).

3. - Spettro di produzione dei mesoni.

Quale sezione d'urto per la produzione di mesoni useremo la (1) integrata su η , cioè la

$$w(E, \varepsilon) d\varepsilon = d\varepsilon \int_0^{E-\varepsilon} \Phi(E, \varepsilon, \eta) d\eta = k_A \left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)^2 \left\{1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{E}\right)\right\} \frac{d\varepsilon}{E}.$$

Anche qui, come nel caso dei nucleoni secondari è necessario distinguere fra i mesoni con energia $\varepsilon \leq E_c$. I mesoni prodotti nel nucleo non vi decadono nè perdono energia in qualche forma; se con $\mathcal{R}(\varepsilon, x) d\varepsilon$ indichiamo la funzione di distribuzione per $\varepsilon > E_c$ abbiamo quindi

$$(11) \quad \frac{\partial \mathcal{R}(\varepsilon, x)}{\partial x} = \int_{\varepsilon}^{E_0} \mathcal{S}(E_0, E, x) w(E, \varepsilon) dE.$$

La (11) è analoga alla (9), e così pure il procedimento di risoluzione per cui diamo senz'altro il risultato

$$(12) \quad \mathcal{R}(\varepsilon) d\varepsilon = \gamma \frac{g(\gamma)}{\lambda(\gamma)} \left\{ \frac{\lambda^2(\gamma) - 2}{\lambda^2(\gamma)} + \frac{2[\lambda(\gamma) + 1] \exp[-\lambda(\gamma)]}{\lambda^2(\gamma)} \right\} \left(\frac{E}{\varepsilon} \right)^\gamma \frac{d\varepsilon}{\varepsilon},$$

con

$$(13) \quad g(\gamma) = \frac{k_A}{2} \left(\frac{1}{\gamma + 1} - \frac{1}{\gamma + 2} - \frac{1}{\gamma + 3} + \frac{1}{\gamma + 4} \right).$$

Per $\varepsilon < E_c$ la (11) viene modificata solo per la sostituzione di ε con E_c come limite inferiore dell'integrale; indicando con $R(\varepsilon, x) d\varepsilon$ la nuova funzione di distribuzione, in questo caso si ha

$$(14) \quad R(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\gamma}{\lambda(\gamma)} \left\{ \frac{\lambda^2(\gamma) - 2}{\lambda^2(\gamma)} + \frac{2[\lambda(\gamma) + 1] \exp[-\lambda(\gamma)]}{\lambda^2(\gamma)} \right\} \times \\ \times \frac{k_A}{2E_c} \left\{ \frac{1}{\gamma + 1} - \frac{1}{\gamma + 2} \frac{\varepsilon}{E_c} - \frac{1}{\gamma + 3} \left(\frac{\varepsilon}{E_c} \right)^2 + \frac{1}{\gamma + 4} \left(\frac{\varepsilon}{E_c} \right)^3 \right\} d\varepsilon.$$

Per la (13), le funzioni $\mathcal{R}(\varepsilon)$ ed $R(\varepsilon)$ soddisfano per $\varepsilon = E_c$ la condizione di continuità $\mathcal{R}(E_c) = R(E_c)$.

Lo spettro di produzione dei mesoni previsto dalla teoria di HEISENBERG, normalizzando sempre lo spettro incidente ad uno, è dato per $\varepsilon \gg Mc^2$ dalla

$$(15) \quad \mathcal{R}_H(\varepsilon) d\varepsilon \cong \frac{2,86\gamma}{\lg [Mc^2 \varepsilon / 2(\pi c^2)^2]} \left(\frac{E_c}{\varepsilon} \right)^\gamma \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

La (15) è confrontabile con la (12), e per dare un'idea della differenza che si ha fra le due teorie nell'atto di produzione per alte energie, diamo nella

seguinte tabella il rapporto $\mathcal{R}_H/\mathcal{R}$ per un elemento leggero (O) ed uno pesante (Ag) e per due valori di γ .

$\frac{\varepsilon/Mc^2}{\gamma}$	O		Ag	
	1,5	1,8	1,5	1,8
10	2,2	3,1	1,7	2,5
15	1,8	2,6	1,4	2,0
20	1,7	2,4	1,3	1,9

In realtà la (15) vale per l'urto nucleone-nucleone, e quindi i rapporti dati, mentre si possono ritenere ancora validi per l'ossigeno, per l'elemento pesante lo sono a meno di un fattore che ne aumenta, ma non di molto, il valore.

4. — Confronto coi dati sperimentali.

Le distribuzioni (12) e (14) valgono anche per i mesoni μ , salvo spostare la condizione di continuità ad $E_c/1,32$, essendo 1,32 il rapporto fra l'energia del mesone π e l'energia del mesone μ di disintegrazione. Così la (15) vale per i mesoni μ con la sostituzione $\varepsilon \rightarrow 1,32\varepsilon$. Si hanno in tal modo le sorgenti dei mesoni μ , che seguono naturalmente la legge di assorbimento della componente nucleonica, del tipo cioè $\exp[-t/R]$ con $R = 135 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$. Introducendo queste sorgenti $\Sigma(\varepsilon, t)$ nella nota soluzione dell'equazione di diffusione della componente mesonica

$$(16) \quad f(\varepsilon, t) = \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{b/(\varepsilon + \beta t)} \int_0^t \left[\frac{\tau}{\varepsilon + \beta(t - \tau)} \right]^{b/(\varepsilon + \beta t)} \Sigma[\varepsilon + \beta(t - \tau), \tau] d\tau,$$

dove β è la perdita di energia per ionizzazione per unità di percorso, e b una costante ($b = 7,5 \cdot 10^5 \mu c/\tau_0$), si può calcolarne lo spettro differenziale $f(\varepsilon, t)$ alle varie profondità t . Al livello del mare la soluzione della (16) è semplice, in quanto il trascurare $\beta\tau$ di fronte ad $\varepsilon + \beta t$ ed estendere l'integrazione su t fino ad ∞ diventano approssimazioni lecite, e con ciò l'integrale si riduce ad una funzione gamma completa.

Il confronto fatto per $E_c = 3,5 \cdot 10^9 \text{ eV}$ e $\gamma = 1,8$ con lo spettro di WILSON⁽¹²⁾ usando la sorgente (12) per $1,32(\varepsilon + \beta t) > E_c$, altrimenti la (14), dà un ottimo accordo, e solo verso energie più elevate ($> 1,5 \cdot 10^9 \text{ eV}$) sarebbe

(12) J. G. WILSON: *Nature*, **158**, 415 (1946).

richiesta una decrescenza più rapida. Non è possibile stabilire un confronto con la sorgente (15), valendo questa per i mesoni μ per $\varepsilon > 6Mc^2$; è da notare solo che il fattore logaritmico a denominatore lascia prevedere per alte energie un miglior accordo con l'esperienza della (15) che non della (12). Questo genere di confronto non è però molto significativo, in quanto qualunque teoria che fornisca una sorgente che conservi lo spettro della primaria e venga assorbita con la stessa legge (sperimentale) è in grado di rendere conto dello spettro mesonico al livello del mare. Questo spiega il disaccordo con l'esperienza verso le basse energie della teoria di HEITLER e WALSH, la quale pur operando con una sorgente del tipo (12) le assegna però un cammino di assorbimento dell'ordine di un decimo di quello sperimentale, bloccando in tal modo i nucleoni e quindi i mesoni di bassa energia che decadono prima di raggiungere il livello del mare.

Gli spettri differenziali dati ci permettono di calcolare il numero medio di nucleoni e mesoni prodotti in un urto nucleone-nucleo. Per una particella che ionizzi 1,5 volte il minimo il rapporto fra momento e massa a riposo vale circa 0,7; indicando con ε^* ed E^* le energie cinetiche dei mesoni π (~ 30 MeV) e dei nucleoni (~ 190 MeV) corrispondenti a questo rapporto, il numero medio di mesoni e nucleoni osservabili come « thin tracks » è dato da ⁽¹³⁾

$$\int_{\varepsilon^*}^{E_c} R(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{E_c}^{\infty} \mathcal{R}(\varepsilon) d\varepsilon,$$

rispettivamente da

$$\int_{E^*}^{E_0} S(E) dE + \int_{E_0}^{\infty} \mathcal{S}(E) dE.$$

Usando $E_c = 3,5 \cdot 10^9$ eV e $\gamma = 1,5$ si hanno 1,74 mesoni e 2,56 nucleoni per l'argento, 1,35 mesoni e 2,42 nucleoni per l'ossigeno. Dei nucleoni in media solo metà sono protoni, e quindi in un urto si ha un numero medio 3,02 di particelle ionizzanti per l'argento, 2,56 per l'ossigeno, ed in accordo con l'esperienza i contributi dei mesoni e dei protoni sono dello stesso ordine di grandezza. Ammettendo ora con HEITLER e JANOSSY che non solo i vari atti di emissione ma anche le singole particelle ionizzanti siano statisticamente indipendenti fra di loro, possiamo applicare ai precedenti numeri medi la legge statistica di POISSON e calcolare così la frequenza degli sciami osservati con

⁽¹³⁾ Agli effetti di questa valutazione il raccordare graficamente le distribuzioni $R(E)$ ed $\mathcal{R}(E)$ per $E = E_c$ e tener conto per la $R(E)$ dello spostamento dello spettro dovuto agli urti elastici nel nucleo comporta una correzione insignificante. I risultati rimangono sostanzialmente invariati scegliendo $\gamma = 1,8$.

le lastre fotografiche in funzione del numero n di particelle ionizzanti. Tenendo conto che nelle lastre si ha praticamente un atomo leggero (C, O, N) per uno pesante (Ag, Br), il che significa che bisogna normalizzare la somma delle due fluttuazioni, ed escludendo gli sciami con $n \leq 2$ particelle, data l'energia relativamente bassa del primario, si hanno i risultati riassunti nella tabella seguente:

n	3	4	5	6	7	8
Sper.	61	44	29	14	6	5
Teor.	68 (34)	47 (21)	26 (11)	12,2 (4,5)	5 (1,6)	1,9 (0,5)

dove in parentesi è dato il contributo degli elementi leggeri.

Date le approssimazioni fatte, l'accordo è buono, nè si può pretendere di averlo per n molto maggiore del valore medio, quando questo in realtà non riflette un insieme di eventi indipendenti. In tal caso il problema richiede un'impostazione diversa (⁷), con un metodo più fenomenologico ma più adatto all'ipotesi dell'indipendenza statistica.

I risultati ottenuti sono legati alla particolare scelta della sezione d'urto (1) e quindi non possono avere che un valore indicativo. Non è detto che con un altro tipo di sezione d'urto non si possano rendere ugualmente bene i risultati sperimentali esaminati. Solo con una maggior ricchezza di dati avranno significato tentativi in questo senso, in particolare una più accurata scelta dei coefficienti α e β , che riteniamo però non possano essere molto diversi nè fra loro nè dall'unità.

Sono grato al prof. JANOSSY ed al prof. ROSENFELD per alcune discussioni sull'argomento.

SUMMARY

Assuming a cross-section depending only from the relative energies, the production spectra both of mesons and secondary nucleons in a collision of a fast nucleon with a compound nucleus are calculated in the hypothesis of plural production. The size-frequency distribution of penetrating showers following from these spectra are compatible with the experimental data.

Sulla “ Bremsstrahlung ” nei cristalli.

B. FERRETTI

*Centro di Fisica Nucleare del Consiglio Nazionale delle Ricerche
Istituto di Fisica dell'Università di Roma*

(ricevuto il 10 Febbraio 1950)

Riassunto. — Si segnala e si studia un fenomeno interferenziale della « Bremsstrahlung » nei cristalli particolarmente cospicuo per elettroni di altissima energia. Si discutono alcune conseguenze del fenomeno studiato.

1. — Introduzione.

Generalmente i fenomeni interferenziali di radiazioni qualsivoglia, (elettromagnetiche o corpuscolari) dovuti a strutture periodiche, sono importanti soltanto quando la lunghezza d'onda della radiazione è confrontabile con il « passo » della struttura periodica (a meno che non si prendano speciali precauzioni).

Una curiosa eccezione a questa regola, che per vari aspetti appare abbastanza interessante, si presenta qualora si studi l'irraggiamento da parte di particelle cariche (praticamente elettroni) dotate di energie anche elevatissime, irraggiamento che si produce quando tali particelle attraversano una struttura periodica come un cristallo. Quello che si trova è che le perdite di energia possono variare in modo anche relativamente cospicuo al variare della direzione di incidenza dell'elettrone rispetto ai piani di simmetria del cristallo; ciò che appare singolare è il fatto che questo effetto tende a divenire più cospicuo con l'aumentare della energia della particella incidente, ossia col diminuire della lunghezza d'onda associata alla particella stessa.

La ragione di questo fatto a prima vista singolare appare essere la seguente: nel fenomeno della Bremsstrahlung anche quando sono in gioco energie elevatissime sia della particella incidente sia del quanto irraggiato, l'impulso Δp scambiato con la « materia » (nuclei atomici) rimane generalmente relativa-

mente piccolo, tanto che si possono trascurare gli atti di irraggiamento in cui tale impulso è superiore a $\sim m_0 c$, m_0 essendo la massa dell'elettrone. In realtà anzi la sezione d'urto parziale per atti di irraggiamento in cui l'impulso Δp scambiato con la materia è molto minore di $m_0 c$, è tutt'altro che trascurabile rispetto alla sezione d'urto totale. I fenomeni di tipo interferenziale a cui ho accennato si manifestano quindi in quanto $\hbar/\Delta p$ può essere confrontabile con il passo del reticolo cristallino anche quando l'impulso p dell'elettrone incidente o del quanto irraggiato è estremamente grande. Non pare tuttavia che questa osservazione sia comunemente nota, e che i fenomeni curiosi di interferenza della Bremsstrahlung nei cristalli, soprattutto nel caso delle altissime energie siano stati studiati. Nel presente lavoro si cerca di colmare in qualche modo la lacuna che ora abbiamo segnalata e si espongono i risultati della ricerca che è stata fatta in proposito.

2. — Caso di un “ cristallo perfetto ”.

Cominceremo per semplicità e chiarezza col trattare il caso del tutto ideale di un cristallo infinito costituito da atomi infinitamente pesanti. Nel prossimo paragrafo discuteremo le correzioni da apportarsi alla teoria abbozzata nel presente paragrafo, dovute alla finitezza della massa degli atomi, e delle dimensioni del cristallo.

Per semplicità e per fissare le idee, tratteremo il caso di un cristallo cubico, e useremo un metodo simile a quello di WEIZSÄCKER ⁽¹⁾.

Il campo elettrico all'interno del cristallo che agirà sull'elettrone incidente, sarà la sovrapposizione dei campi elettrici dovuti ai singoli atomi, e precisamente ai campi della carica nucleare schermata dalle cariche elettroniche. Il potenziale V creato da un singolo atomo, con buona approssimazione si potrà considerare come una funzione solo della distanza r dal centro dell'atomo, la quale si annullerà praticamente, a una distanza R_0 dell'ordine del raggio atomico. Nei reticoli reali, se D_0 è il passo del reticolo, si dovrebbe assumere

$$D_0 \leq 2R_0.$$

Per poter dare maggior generalità ai calcoli, cosa che ci sarà utile in seguito, noi assumeremo invece

$$(1) \quad D_0 \geq 2R_0.$$

Ciò posto il potenziale V in tutto il cristallo potrà essere scritto nella forma seguente mediante una serie tripla di FOURIER:

$$(2) \quad V = \sum_k V_k \exp [i\mathbf{k} \times \mathbf{r}],$$

(1) C. v. WEIZSÄCKER: *Zeits. f. Phys.*, **88**, 612 (1934).

dove

$$(3) \quad \mathbf{k} = \frac{2\pi}{D_0} (n_1 \mathbf{i}_1 + n_2 \mathbf{i}_2 + n_3 \mathbf{i}_3),$$

n_1, n_2, n_3 essendo numeri interi positivi, negativi o nulli, e $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ essendo i tre versori paralleli ai lati della cella elementare del cristallo.

Vogliamo ora osservare che, volendo applicare il metodo dei parametri d'urto è necessario « tagliare » il potenziale a distanze dal centro di ciascun atomo dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda COMPTON dell'elettrone $\lambda = \hbar/m_0 v$. Questo può essere fatto in modo equivalente, « tagliando » invece nello spazio dei vettori \mathbf{k} .

Praticamente, noi assumeremo nella (2) uguali a zero tutti i V_k corrispondenti a valori di $|\mathbf{k}| > \bar{k}$ dove

$$(4) \quad \bar{k} = 1/\lambda.$$

Analogamente potremo tener conto della azione di schermo degli elettroni trascurando nella (2) i V_k per i vettori \mathbf{k} per cui il modulo è minore di \underline{k} dove $\underline{k} = 1/R_0$.

I coefficienti V_k corrispondenti viceversa a

$$\underline{k} < |\mathbf{k}| < \bar{k}$$

saranno calcolati assumendo che il campo dovuto a ciascun atomo sia un campo coulombiano dovuto alla carica puntiforme del nucleo.

Pertanto avremo

$$(5) \quad V_k = \begin{cases} 2\pi NZe \int_0^{R_0} r dr \int_0^\pi \exp - [i\mathbf{k} \times \mathbf{r}] \sin \vartheta d\vartheta = \frac{4\pi NZe}{k^2}, & \text{se } \frac{1}{R_0} \leq k = |\mathbf{k}| < \frac{1}{\lambda}, \\ 0 & , \text{ se } \begin{cases} k < 1/R_0, \\ \text{oppure} \\ k > 1/\lambda, \end{cases} \end{cases}$$

(N è il numero di atomi per cm^3 e Z è il numero atomico).

Ciò posto, sia un elettrone proveniente lungo la direzione avente i coseni direttori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rispetto alla terna $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Si assuma come nuova terna di riferimento la terna $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$ e si supponga che \mathbf{j}_1 abbia i coseni direttori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rispetto alla vecchia terna.

Siano i coseni direttori di \mathbf{j}_2 e di \mathbf{j}_3 rispettivamente $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Allora, se x, y, z , sono coordinate cartesiane ortogonali di assi $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$, si ha

$$(6) \quad \mathbf{k} \times \mathbf{r} = k_1 x + k_2 y + k_3 z,$$

dove

$$(6-bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 = \frac{2\pi}{D_0} (n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3), \\ k_2 = \frac{2\pi}{D_0} (n_1\beta_1 + n_2\beta_2 + n_3\beta_3), \\ k_3 = \frac{2\pi}{D_0} (n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + n_3\gamma_3). \end{array} \right.$$

Poniamoci ora nel sistema di riferimento in cui l'elettrone imperturbate è in quiete: indicando allora in tale sistema con A_1, A_2, A_3, A_4 , le componenti del quadripotenziale, si ha:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \sum A_{1k} = \beta A_0 = \beta \sum A_{0k}, \\ A_2 = 0, \\ A_3 = 0, \\ A_4 = \sum A_{4k} = i A_0, \end{array} \right.$$

dove

$$(7-bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{1k} = \beta A_{0k}, \\ A_{4k} = i A_{0k}, \end{array} \right.$$

essendo

$$(7-ter) \quad A_{0k} = \frac{V_k}{\sqrt{1-\beta^2}} \exp [i(k_2 y + k_3 z)] \exp \left[i \frac{k_1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x' - vt') \right],$$

essendo $\beta = v/c$ e v la velocità dell'elettrone; x' e t' sono relativi al sistema di riferimento in cui l'elettrone è in quiete.

Si eseguisca ora la trasformazione di « gauge »

$$(8) \quad \begin{aligned} \bar{A}_e &= \sum \bar{A}_{ek} \rightarrow A_e + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_e}, & (\Lambda = \sum \Lambda_k) \\ \bar{A}_{ek} &\rightarrow A_{ek} + \frac{\partial \Lambda_k}{\partial x'_e}, \end{aligned}$$

dove

$$(8-bis) \quad \frac{\partial \Lambda_k}{\partial x'_4} = -A_{4k},$$

Confrontando la (7-bis), la (7-ter) e la (8-bis) si ottiene:

$$(9) \quad \Lambda_k = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{k_1 \beta} A_{4k}.$$

Allora, con la solita approssimazione del metodo di WEIZSÄCKER, ponendo $\beta = 1$ ovunque, tranne che nella espressione $(1 - \beta^2)^{-1/2}$, si ottiene:

$$(10) \quad \bar{A}_1 = 0; \quad \bar{A}_2 = \sum \bar{A}_{2k}; \quad \bar{A}_3 = \sum \bar{A}_{3k}; \quad \bar{A}_4 = 0,$$

dove

$$\begin{cases} \bar{A}_{2k} = -\frac{k_2}{k_1} V_k \exp [i(k_2 y' + k_3 z')] \exp \left[i \frac{k_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} (x' - ct') \right], \\ \bar{A}_{3k} = \frac{k_3}{k_2} \bar{A}_{2k}. \end{cases}$$

Si noti che i valori di y e di z nelle (10) per una determinata traiettoria elettronica dovrebbero essere costanti: ciò non può essere rigorosamente vero se si tiene conto del principio di indeterminazione; però volendo applicare il metodo dei parametri di urto dovremmo pensare che la indeterminazione in y e z non superi di molto λ . Allora per valori di k che siano inferiori a \bar{k} , \bar{k} essendo definito dalla (4), potremo trascurare nella (10) la variazione di A_{2k} e di A_{3k} al variare di y e di z entro l'intervallo di variabilità permesso. Ciò corrisponde a quanto si fa usualmente applicando il metodo di WEIZSÄCKER ⁽²⁾.

Pensando nelle (10) y e z come costanti, le (10) stesse diventano identiche alle equazioni del tetrapotenziale relativo a un'onda elettromagnetica piana, di frequenza ciclica data da:

$$(11) \quad \nu_k = \frac{k_1 c}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

in cui inciderebbero n_k fotoni per unità di tempo e di superficie; n_k è dato da

$$(12) \quad n_k = \frac{\nu_k}{4\pi\hbar c} \{ |\bar{A}_{2k}|^2 + |\bar{A}_{3k}|^2 \}.$$

Per ottenere ora il numero di quanti irraggiati per unità di tempo per effetto della componente di FOURIER di indice k non c'è altro che da moltiplicare la (12) per la espressione della sezione di urto per effetto COMPTON secondo KLEIN e NISHINA. Dopo di ciò, seguendo un procedimento che d'ora

⁽²⁾ In seguito alla discussione dei nn. 3 e 4 diventeranno chiari gli effetti delle approssimazioni del metodo del parametro d'urto, in particolare dovuti al fatto di aver preso $\exp [i(k_2 y' + k_3 z')]$ costante. Ciò è senz'altro corretto per k molto minore di $1/\lambda$. Non lo è più per k dell'ordine di $1/\lambda$. Ma, come vedremo, soltanto i k minori di $1/\lambda$ sono praticamente importanti, relativamente all'effetto interferenziale studiato. Si noti inoltre che il fatto di aver assunto una indeterminazione Δx nella posizione dell'elettrone dell'ordine di λ ci costringe ad assumere nella direzione di provenienza una certa indeterminazione. Questa però può esser resa piccola a piacere pur di prendere $1/\lambda$ e quindi l'impulso totale della particella sufficientemente grande. Questa circostanza pertanto non altera le conclusioni raggiunte nel testo.

innanzi ripete punto per punto quello ben noto di WEIZSÄCKER ⁽¹⁾, si può nuovamente passare con una trasformazione di LORENTZ al sistema di riferimento in cui il cristallo è in quiete. Posto allora:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma = \frac{\hbar \nu_k}{m_0 c^2}, \\ \varepsilon = \frac{\hbar \nu}{m_0 c^2} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\hbar \nu}{E_0}, \end{array} \right.$$

in cui ν è la frequenza del quanto diffuso nel sistema del cristallo ed E_0 la energia iniziale dell'elettrone, si ha che il numero di quanti $n(\mathbf{k}, \nu) d\nu$ di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ irraggiati per unità di percorso per effetto della componente k del campo dovuto al reticolo cristallino, è dato da:

$$(14) \quad n(\mathbf{k}, \nu) d\nu = \frac{r_0^2}{4\hbar c^2} (1 - \beta^2) \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1^2} |V_k|^2 \times \\ \times \left\{ 1 - \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{\gamma^2(1 - \varepsilon)^2} - \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon)\gamma} \right\} d\nu$$

(r_0 = raggio classico dell'elettrone); dove però ε è soggetto alle seguenti limitazioni

$$(14-bis) \quad \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} \leq \nu_k \leq \frac{m_0 c^2}{\hbar} \frac{\varepsilon}{1 - \beta},$$

ossia anche

$$(14-ter) \quad \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} \leq \gamma \leq \frac{\varepsilon}{1 - \beta}.$$

Sostituendo ora al posto di V_k nella (14) le espressioni date nelle (5), avremo finalmente:

$$(15) \quad n(k, \nu) d\nu = \frac{4r_0^2 \pi^2 N^2 Z^2 e^2}{\hbar c^2} (1 - \beta^2) \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1^2 k^4} \left[1 - \varepsilon + \frac{1}{1 - \varepsilon} + \dots \right] d\nu,$$

[naturalmente con le limitazioni (14-bis) o (14-ter)].

Notiamo ora che il principale contributo all'irraggiamento verrà dato da quei termini per i quali $(k_2/k)^2$ è una quantità molto minore di 1. Tenendo conto di questa circostanza, la (15) si trasforma nella

$$(15-bis) \quad n(\mathbf{k}, \nu) = \frac{4\pi^2 N^2 Z^2 e^2 r_0^2}{\hbar c^2 k_1^2 k^2} (1 - \beta^2) \left[1 - \varepsilon + \frac{1}{1 - \varepsilon} + \dots \right].$$

Non resterebbe ora che da sommare.

Vogliamo trattare innanzi tutto il caso limite di D_0 tendente all'infinito: in questo caso dovremmo ottenere il risultato normale, come appunto si veri-

ficherà: il calcolo sarà fatto esplicitamente perchè è abbastanza istruttivo per quanto dovremo concludere in seguito.

Nel caso limite di D_0 tendente all'infinito, possiamo sostituire alla sommatoria rispetto agli indici k un integrale. Allo scopo, notiamo che il numero di vettori \mathbf{k} aventi modulo compreso tra k e $k + dk$ e direzione e verso nell'elemento di angolo solido $d\Omega_{\mathbf{k}}$ è dato da

$$(16) \quad dN_k = \left(\frac{D_0}{2\pi}\right)^3 k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{N} \frac{1}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}}.$$

Si ponga ora

$$(17) \quad k_1 = k \cos \alpha = ky,$$

e in conseguenza

$$d\Omega_{\mathbf{k}} = 2\pi \sin \alpha d\alpha = -2\pi dy.$$

Allora la sommatoria rispetto a k si può eseguire, dopo aver moltiplicato la (15-bis) per dN_k dato dalla (16), prima integrando rispetto alle varie direzioni definite dall'angolo α , e poi integrando rispetto al modulo k . Per procedere alla integrazione è però necessario determinare i limiti di integrazione, tenendo conto sia delle condizioni (14-bis) che delle (5). Per la (14-bis) deve essere (ricordando la (11)):

$$(18) \quad |k_1| \geq \frac{m_0 c}{\hbar} \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \sqrt{1-\beta^2},$$

e quindi

$$(19) \quad |y| \geq \frac{m_0 c}{\hbar} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{k} \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{k} \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)}.$$

D'altra parte se si tien conto delle (18) e delle (5), k deve soddisfare le seguenti disuguaglianze:

$$(20) \quad k_{min} \leq k \leq \frac{1}{\lambda},$$

dove

$$(20-bis) \quad k_{min} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \frac{\varepsilon \sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\varepsilon)}, \\ oppure \\ k = \frac{1}{R_0} \quad se \quad \frac{1}{R_0} > \frac{1}{\lambda} \frac{\varepsilon \sqrt{1-\beta^2}}{2(1-\varepsilon)}. \end{cases}$$

Pertanto, tenuto conto di tali disuguaglianze si ha che il numero totale di quanti irraggiati aventi una frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è data da:

$$(21) \quad n(\nu) d\nu = d\nu NZ^2 \frac{e^2}{\hbar c^2} r_0^2 (1 - \beta^2) \int_{k_{min}}^{1/\lambda} dk \frac{2}{k^2} \int \frac{dy}{y^2} \left\{ 1 - \varepsilon + \frac{1}{1 - \varepsilon} + \dots \right\},$$

$$\frac{1}{k} = \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \beta^2}}{\lambda k \cdot 2(1 - \varepsilon)}$$

dove k_{min} è dato dalla (20-bis). Le quadrature indicate si eseguono immediatamente e, ricordando l'espressione di ε in funzione di ν (v. formula (13)) si ottiene [essendo $d\nu = c/\lambda \sqrt{1 - \beta^2} d\varepsilon$ e integrando il termine in $\sin^2 \Theta$ ⁽³⁾ che compare nella formula di KLEIN e NISHINA a tutto l'angolo solido nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è in quiete]:

$$(22) \quad n(\varepsilon) d\varepsilon = 4NZ^2 \frac{e^2}{\hbar c} r_0^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ (1 - \varepsilon)^3 + 1 - \frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \right\} \cdot \begin{cases} \log \frac{2(1 - \varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \text{oppure} \\ \log R_0/\lambda, \end{cases}$$

dove vale l'una o l'altra determinazione a seconda che vale la corrispondente determinazione nella (20-bis).

La (22) coincide come si vede con la usuale formula nella approssimazione di WEIZSÄCKER, e quindi il risultato espresso dalla (22) costituisce anche una verifica della correttezza di tutto il procedimento usato.

Torniamo ora al caso effettivo nel quale D_0 si deve considerare dell'ordine di grandezza $2R_0$. Sfruttando i calcoli fatti per il caso precedente possiamo intanto stabilire molto semplicemente un risultato riguardante il numero dei fotoni e la perdita di energia dovuti a Bremsstrahlung nel cristallo mediati rispetto a tutte le direzioni di provenienza dell'elettrone incidente.

Possiamo notare che, poichè l'operazione di media rispetto alle varie direzioni di incidenza e di somma rispetto all'indice k sono invertibili, possiamo mediare separatamente, rispetto alle varie direzioni di incidenza dell'elettrone, il numero di quanti emesso $n(\mathbf{k}, \nu) d\nu$ dovuto alla componente di FOURIER di indice k e poi sommare la media così ottenuta rispetto a k .

Si scorge immediatamente che, per eseguire la media (rispetto alle direzioni di incidenza) di $n(\mathbf{k}, \nu)$, si ha semplicemente da calcolare un integrale identico all'integrale preso rispetto ad y che compare nella formula (21). Si noti poi che purchè sia D_0 maggiore di $2R_0$ come deve sempre essere, la somma rispetto a k può essere nelle approssimazioni usate sostituita con un integrale rispetto a k in modo analogo a quanto si è fatto nel caso in cui D_0 era molto maggiore di $2R_0$.

Pertanto la media rispetto a tutte le direzioni di incidenza di $n(\nu)$ è, entro

(3) Θ è l'angolo che forma il quanto diffuso con la direzione di incidenza del quanto nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è fermo.

le approssimazioni fatte, e finchè l'approssimazione di BORN si ritiene valida, data dall'integrale (21).

Si ottiene così il seguente risultato: «mediando su tutte le direzioni di incidenza, lo spettro dei quanti irraggiati da un elettrone in un cristallo è lo stesso di quello che si calcola per una sostanza amorfa avente lo stesso numero di atomi per unità di volume e lo stesso numero atomico».

Questo risultato che, come è ovvio vale anche per la perdita di energia media, si deve però considerare valido finchè vale l'approssimazione di BORN. Su ciò ritorneremo in seguito.

Vogliamo ora discutere come varia $n(\mathbf{k}\nu)$ al variare della direzione di incidenza. Secondo la (5) e la (4) noi avremmo da considerare soltanto vettori \mathbf{k} per i quali sia soddisfatta la disuguaglianza

$$(23) \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \frac{D_0^2}{\lambda^2}.$$

L'insieme delle terne di numeri interi n_1, n_2, n_3 , che soddisfano alla disuguaglianza (23) è finito e pertanto, fissati $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, l'insieme dei valori k_1 corrispondenti a terne n_1, n_2, n_3 , soddisfacenti alla (23) è costituito anch'esso da un numero finito di elementi. Quindi tale insieme ammette un minimo che potrà essere eventualmente nullo per certe direzioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Esisteranno però certamente infinite direzioni per cui l'equazione

$$(24) \quad n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 = 0,$$

non potrà essere soddisfatta da terne di numeri interi soddisfacenti la (23). Per tali direzioni il valore minimo dell'insieme dei valori assoluti di k_1 sarà certamente maggiore di 0.

Sia allora una direzione i cui coseni direttori non soddisfino la (24) e sia per tale direzione k_1 il valore minimo del valore assoluto di k_1 . Ricordando allora la (15-bis) si ha per tale direzione:

$$(25) \quad n(\mathbf{k}, \nu) \leq (1 - \beta^2) \frac{4\pi N^2 Z^2 e^2 r_0^2}{\hbar c^2} \frac{R_0^2}{k_1^2} \left\{ 1 - \varepsilon + \frac{1}{1 - \varepsilon} + 1 \right\}.$$

D'altra parte ricordiamo (cfr. (23)) che il numero di determinazioni di k per le quali dobbiamo sommare per ottenere il numero totale di quanti irraggiati tra la frequenza ν e $\nu + d\nu$ è finito e indipendente dalla energia dell'elettrone incidente.

Sia G il numero di tali determinazioni: allora ricordando la (25) si ha immediatamente che il numero $n(\nu)d\nu$ di quanti emessi con frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ soddisfa certamente alla seguente disuguaglianza:

$$(26) \quad n(\nu)d\nu \leq d\nu(1 - \beta^2)G \frac{4\pi^2 N^2 Z^2 e^2 r_0^2}{\hbar c^2} \frac{R_0^2}{k_1^2} \left\{ 1 - \varepsilon + \frac{1}{1 - \varepsilon} + 1 \right\}.$$

Il secondo membro della (26) è costituito dal prodotto di due termini

l'uno indipendente dalla energia E_0 dell'elettrone incidente, l'altro $(1 - \beta^2)$ il quale tende a zero col tendere di E_0 all'infinito, come $1/E_0^2$.

Si deduce pertanto dalla (25) che: « per ogni direzione i cui coseni direttori non soddisfino la (24) il numero dei quanti irraggiati tende a zero col tendere all'infinito della energia dell'elettrone incidente, per qualunque frequenza purchè maggiore di zero ».

Ne segue immediatamente che « per ogni direzione i cui coseni direttori non soddisfino la (24) la perdita di energia per irraggiamento tende a zero col tendere all'infinito della energia dell'elettrone incidente ».

Questi risultati sono piuttosto sorprendenti: essi ci fanno comprendere che un grande e perfetto monocristallo sarebbe perfettamente trasparente in quasi ogni direzione per elettroni di energia sufficientemente elevata. Non solo, ma se li confrontiamo con il teorema precedentemente stabilito secondo il quale la perdita di energia mediata su tutte le direzioni di incidenza deve essere uguale a quella usuale e quindi crescente in modo circa proporzionale con la energia, ne deduciamo che esisteranno per qualunque energia direzioni nelle quali la perdita di energia deve essere elevatissima quando E_0 diviene molto grande per compensare il bassissimo valore del frenamento nelle direzioni in cui il cristallo è trasparente.

Pertanto esisteranno, quando E_0 è molto elevato, dei « coni » di direzioni in cui il cristallo è praticamente trasparente e dei « coni » in cui il cristallo è estremamente opaco.

Vogliamo ora studiare come sono conformati questi « coni » trasparenti o opachi di cui abbiamo stabilito l'esistenza e come la loro conformazione dipenda dalla energia E_0 .

Intanto è chiaro dalla discussione precedente che i coni opachi saranno costituiti da certi intorni delle direzioni i cui coseni direttori soddisfino alla equazione (24).

Data una terna di numeri interi n_1, n_2, n_3 , la giacitura normale alla direzione di coseni direttori proporzionali rispettivamente a n_1, n_2, n_3 è costituita da direzioni tutte soddisfacenti l'equazione (24).

Tenendo conto della (23) si scorge che il numero di tali giaciture che ci possono interessare sarà finito, ed esse intersecandosi daranno luogo a un numero finito di coni.

Chiameremo d'ora innanzi per intenderci tali coni « celle coniche » o semplicemente « celle ».

Risulta allora chiaro che i coni trasparenti saranno costituiti dalla parte centrale delle « celle », mentre i coni opachi saranno costituiti dalla loro parte periferica. Per precisare quantitativamente tale conclusione ricordiamo la (18).

È allora senz'altro chiaro che le direzioni per le quali vale la disuguaglianza

$$(27) \quad k_1 \gg \frac{1}{\lambda} \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} \sqrt{1 - \beta^2},$$

apparterranno a coni trasparenti per la frequenza $\nu = \varepsilon E_0/\hbar$, mentre apparterranno a coni opachi le direzioni per le quali vale la relazione:

$$(28) \quad k_1 \cong \frac{1}{\lambda} \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} \sqrt{1-\beta^2}.$$

È chiaro allora che, poichè i secondi membri delle relazioni (27) e (28) sono inversamente proporzionali alle energie E_0 , i valori di k_1 per i quali esse saranno soddisfatte diventeranno sempre più piccoli al crescere della energia, e ciò corrisponde al fatto che, al tendere di E_0 all'infinito, i coni trasparenti si allargano tendendo ad occupare completamente le « celle », mentre i coni opachi tendono a ridursi al contorno delle « celle » stesse.

3. - Caso di un cristallo reale.

Vogliamo ora vedere quale può essere l'ordine di grandezza degli effetti e degli errori dovuti alle approssimazioni e schematizzazioni adottate nel paragrafo precedente.

Cominciamo con il considerare gli effetti dovuti al fatto che la massa degli atomi componenti un cristallo reale è finita. A causa di tale circostanza si verificano questi due fatti: *a*) gli atomi non sono in realtà localizzati nei punti del reticolo cristallino, ma compiono attorno a tali punti un moto di vibrazione dovuto alla agitazione termica. Come è noto, questo moto ha ampiezza diversa da zero anche allo zero assoluto; *b*) il rinculo dei singoli nuclei in seguito all'impulso trasmesso loro nell'atto della Bremsstrahlung non è più completamente trascurabile. Cominciamo col discutere gli effetti del fatto *a*).

In conseguenza di *a*), nel caso di un cristallo reale sia pure di dimensioni grandi a piacere, il potenziale elettrostatico non è più a stretto rigore sviluppabile in serie di FOURIER, ma è rappresentabile mediante un integrale di FOURIER. Pertanto invece della (2) varrà genericamente la

$$(29) \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathcal{V}(\boldsymbol{\xi}) \exp[i\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}] d\boldsymbol{\xi}.$$

Per porre in relazione la (2) con la (29) notiamo che anche la (2) si può scrivere sotto la forma (29) ponendo

$$(30) \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{V}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \boldsymbol{\xi}),$$

dove

$$\delta(\mathbf{k} - \boldsymbol{\xi}) = \delta(k_x - \xi_x) \delta(k_y - \xi_y) \delta(k_z - \xi_z)$$

(δ è la funzione di DIRAC).

Per avere una idea dell'effetto della agitazione termica, notiamo che l'effetto delle cariche nucleari può essere rappresentato come l'effetto dovuto a tante cariche Ze tutte uguali localizzate esattamente nei punti P_0 del reticolo, come nel caso ideale che avevamo considerato fino ad ora, più l'effetto di tanti sistemi di due cariche uguali e di segno opposto localizzate rispettivamente quella $-Ze$ nei punti P_0 , e quella $+Ze$ nei punti P veramente occupati dagli atomi.

Si può quindi tener conto degli effetti della agitazione termica sovrapponendo al potenziale del cristallo ideale dato, per es., dalla (30), il potenziale dovuto ai sistemi di cariche localizzate in P e P_0 ; tenendo conto che i segmenti PP_0 avranno un modulo medio dipendente dall'ampiezza della agitazione termica e per altro saranno orientati a caso.

Si consideri ora uno ξ tale che l'ampiezza media di vibrazione Δx dovuta alla agitazione termica sia molto minore di $2\pi/|\xi|$. Allora l'andamento del potenziale per distanze comparabili con Δx dai punti P_0 non ha eccessiva importanza per il calcolo della componente $\mathcal{V}(\xi)$ di FOURIER del potenziale stesso. Pertanto tale componente di FOURIER potrà essere calcolata sviluppando in serie di multipoli il potenziale dovuto ai sistemi di due cariche localizzate nei punti P_0 e P e poi tagliando per distanze comparabili con Δx alle quali tale sviluppo in serie divergerebbe malamente. Pertanto purchè $|\xi|$ soddisfi alla disuguaglianza

$$(31) \quad |\xi| \ll \frac{2\pi}{\Delta x},$$

risulta facilmente mediante il predetto artificio che le componenti $\mathcal{V}(\xi)$ di FOURIER sono date dalla equazione:

$$(32) \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{V}(\xi) = \sum_{\mathbf{k}} (V_{\mathbf{k}} - \Delta V_{\mathbf{k}}) \delta(\xi - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \varphi(\xi),$$

dove i $\Delta V_{\mathbf{k}}$ nella prima approssimazione non nulla sono dovuti ai quadrupoli e quindi proporzionali in prima approssimazione alla elongazione quadratica media dei nuclei dalla posizione di equilibrio, e $\varphi(\xi)$ è una funzione continua di ξ che rappresenta nella prima approssimazione non nulla il contributo dei termini di dipolo ed è data in tale approssimazione dalla

$$(32-bis) \quad \varphi(\xi) \cong - \frac{4\pi i}{\sqrt{(2\pi)^3}} Ze \frac{\sin \xi h}{\lambda \xi^2} \sum_n \exp [i \mathbf{p}_n \times \xi_n] \frac{\Delta \mathbf{P}_n \times \xi}{\xi},$$

dove $\xi = |\xi|$, $\Delta \mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_{0n}$ e \mathbf{p}_n è il vettore del reticolo ossia $\mathbf{p}_n = \mathbf{P}_{0n} - 0$.

Dalla (32) si scorge immediatamente che almeno per le frequenze soddisfacenti alla (31) l'agitazione termica in un monocristallo supposto infinitamente grande, ha l'effetto di sovrapporre allo spettro di righe infinitamente sottili, rappresentante secondo la (30) la trasformata di FOURIER del poten-

ziale di un cristallo perfetto nel senso del numero precedente, un fondo continuo la cui ampiezza in prima approssimazione è proporzionale all'ampiezza media delle oscillazioni termiche.

Inoltre le intensità delle righe monocromatiche verranno diminuite, e le correzioni saranno in prima approssimazione, proporzionali ai quadrati delle ampiezze delle oscillazioni termiche.

La parte continua dello spettro dà naturalmente luogo a un fondo di quanti irraggiati i quali saranno distribuiti con continuità sia nei coni trasparenti che nei coni opachi.

Si può valutare l'entità complessiva di tale fondo, tenendo presente che l'elongazione quadratica media dovuta alla vibrazione allo zero assoluto è data da

$$(33) \quad \Delta x \propto \frac{\hbar}{2\sqrt{kM\Theta_D}},$$

dove k è la costante di BOLTZMAN, Θ_D è la temperatura di DEBYE del cristallo ed M la massa atomica. Si ottiene che in media il fondo dovuto alla energia di vibrazione allo zero assoluto può essere limitatamente alle componenti di FOURIER del potenziale soddisfacenti alle (31) circa il 30 % dell'irraggiamento mediato su tutte le direzioni di provenienza.

Naturalmente invece per le frequenze più elevate non soddisfacenti la (31) il fondo continuo diventerà sempre più importante rispetto alla parte singolare, sinchè la parte singolare diventerà trascurabile.

Si giunge così alla conclusione che l'agitazione termica almeno a temperature sufficientemente basse e per le frequenze di FOURIER relativamente basse non altera sostanzialmente gli effetti trovati nel caso del cristallo ideale considerati nel caso del numero precedente, se si eccettua il fatto che, mentre nel caso del cristallo ideale per energie estremamente elevate la perdita di energia per radiazione nei coni trasparenti può diventare piccola a piacere, ciò non può più essere vero in un cristallo reale per effetto del fondo dovuto alla agitazione termica.

Quanto al fatto *b*) si può notare che, per atti di Bremsstrahlung interessanti componenti di FOURIER del potenziale in cui la (31) sia soddisfatta, l'impulso trasmesso alla materia è molto minore di m_0c ed anzi dell'ordine di alcune volte $m_0c/137$: in queste condizioni tenendo conto del fatto che la massa atomica sarà dell'ordine di 10^5 volte la massa dell'elettrone, si scorge immediatamente che anche se detto impulso si pensasse comunicato a un solo atomo, l'energia che questo riceverebbe non supererebbe (come ordine di grandezza) l'energia di legame, dell'atomo considerato. Quindi, almeno fino a che la (31) è soddisfatta, nessun particolare effetto è da attendersi dal rinculo della materia per effetto della Bremsstrahlung.

Resterebbe ora a considerarsi una seconda circostanza, cioè il fatto che i

monocristalli che possono realmente esistere hanno dimensioni finite. Per tale circostanza al posto delle righe infinitamente sottili che compaiono, per es., nella formula (32) avremo delle righe di ampiezza finita, cioè la (32) sarà sostituita da una formula del tipo:

$$(34) \quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \mathcal{V}(\xi) = \sum_k (V_k - \Delta V_k) f_k(\xi - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \varphi(\xi),$$

dove le f_k sono funzioni che rappresentano la forma delle righe. Se il monocristallo ha dimensioni lineari pressochè uguali in tutte le direzioni la larghezza relativa media di tali righe sarà data da

$$(35) \quad \frac{\Delta k}{k} \approx \frac{1}{3\sqrt{\mathcal{N}}},$$

dove \mathcal{N} è il numero totale di atomi del monocristallo.

4. - Discussione e conclusione.

Vogliamo ora discutere alcune delle approssimazioni fatte nelle deduzioni dei precedenti numeri e trarre le conclusioni circa la osservabilità e le conseguenze dell'effetto che abbiamo segnalato.

Nel n. 2 abbiamo fatto sostanzialmente le usuali approssimazioni del metodo di WEIZSÄCKER o dei parametri d'urto. Tale metodo comporta, oltre che certe approssimazioni sue proprie ⁽²⁾, l'uso della approssimazione di BORN.

Ora, dalle conclusioni del n. 2 possiamo facilmente inferire che almeno nel caso dei cristalli perfetti e per energie sufficientemente elevate dell'elettrone, l'approssimazione di BORN deve necessariamente cadere in difetto. Infatti, facendo uso di tale approssimazione noi abbiamo ottenuto due risultati:

a) la perdita di energia mediata su tutte le direzioni di incidenza di un elettrone è uguale a quella che si calcola normalmente;

b) le direzioni lungo le quali si ha una perdita di energia sensibile appartengono (in un cristallo perfetto) ad angoli solidi che tendono a zero quando la energia dell'elettrone incidente tende all'infinito.

Se questi due risultati dovessero esser presi alla lettera ne seguirebbe che il numero di quanti irraggiati per unità di percorso nei coni opachi diventerebbe così grande che la sezione d'urto per irraggiamento corrispondente (nella ipotesi che venga irraggiato un quanto per volta) diventerebbe superiore alla sezione geometrica atomica. Ciò significa evidentemente che la approssimazione di BORN cade in difetto, ed è abbastanza probabile che l'uso della approssimazione di BORN porti a prevedere nelle direzioni « opache » una perdita di energia maggiore di quella reale.

D'altra parte si noti che nelle zone di « trasparenza » non abbiamo ragione

di dubitare della bontà della approssimazione di BORN e quindi possiamo prendere per buoni i risultati che abbiamo ottenuti; in media quindi è probabile che la perdita di energia per irraggiamento sia, almeno in un cristallo perfetto, inferiore a quella che si calcola normalmente, quando la energia E_0 dell'elettrone è molto grande.

Questo risultato è almeno in via di principio verificabile sperimentalmente e quindi vale la pena innanzi tutto di cercare di valutare a quale energia possiamo prevedere che l'uso della approssimazione di BORN cada completamente in difetto.

A questo scopo ricordiamo ancora la (15-bis). Conservando solo gli ordini di grandezza al posto della (23) possiamo scrivere la (36):

$$(36) \quad n(\mathbf{k}\nu) \cong (1 - \beta^2) \frac{8\pi^2 N^2 Z^2 e^2 v_0^2}{\hbar c^2} \frac{1}{k_1^2 k^2}.$$

Vogliamo ora confrontare in base alla (36) il numero $n(\nu)$ di quanti per unità di intervallo di frequenza che si calcola nel caso in cui sia $D_0 \cong 2R_0$, con quello che si calcola con la teoria usuale.

Ricordando la (16) e la (17) noi abbiamo da confrontare le due espressioni:

$$(37) \quad \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k_1^2} = \sum \frac{1}{k^4} \frac{1}{y^2}$$

(la somma va estesa a tutti i vettori \mathbf{k} che soddisfano alle limitazioni usuali) e

$$(38) \quad \left(\frac{D_0}{2\pi}\right)^3 \int dk \int \frac{1}{k_1^2} d\Omega_{\mathbf{k}},$$

dove i limiti di integrazione sono quelli che compaiono nella (21).

Ora si può osservare che i termini che contano di più nella (37) e che nel caso delle direzioni opache praticamente da soli danno tutta la sezione d'urto parziale, sono i due o tre termini della somma nei quali si verificano contemporaneamente le seguenti due circostanze:

- 1) k_1 si avvicina di più al limite inferiore (18);
- 2) kR_0/π è dell'ordine di qualche unità al massimo.

Pertanto basterà paragonare, nelle zone opache, soltanto questi termini più importanti della (37) con l'integrale che compare nella (38).

Ora, posto:

$$(39) \quad \begin{cases} k_0 = \frac{\pi}{R_0} \cong \frac{2\pi}{D_0}, \\ k/k_0 = \chi, \\ |k_1|/k_0 = \chi_1, \quad \chi = \underline{k_1}/k_0, \end{cases}$$

ricordando la (5), e nel caso più favorevole in cui sia:

$$(40) \quad \chi \cong 1$$

si vede che le sezioni d'urto saranno W volte quella normale se

$$\frac{1}{\chi_i^2} \cong W \frac{2\pi}{D_0} \int_{k_{min}}^{1/\lambda} dk \int \frac{d\Omega_k}{k^2} = W \int_{\chi_{min}}^{\chi_{max}} d\chi \int \frac{d\Omega_k}{\chi^2}.$$

Ora, noi possiamo assumere

$$(41) \quad D_0 \cong (500 \div 1000)\lambda,$$

e in conseguenza ricordando la (21)

$$\int_{\chi_{min}}^{\chi_{max}} d\chi \int \frac{d\Omega_k}{\chi^2} = \frac{8\pi k_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \lambda \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \log \frac{\chi_{max}}{\chi_{min}} \cong \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Pertanto deve essere, prendendo $(1-\varepsilon)/\varepsilon$ dell'ordine delle unità:

$$(42) \quad \frac{1}{\chi_i^2} \cong \frac{W}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Ricordando ora la (18) e la (41) ne ricaviamo il seguente valore per $\sqrt{1-\beta^2}$:

$$(42-bis) \quad \sqrt{1-\beta^2} = \left(\frac{2\pi\lambda}{D_0} \right)^2 \frac{1}{W} \cong \frac{1}{10^4 W}.$$

In conseguenza se si assume W dell'ordine di 10^7 , E_0 deve essere dell'ordine di 10^{17} eV.

Per energie di questo ordine praticamente per ogni frequenza irraggiabile si è in condizioni per le quali non può valere l'approssimazione di BORN. Ma se si prende, per es., ε dell'ordine di 10^{-5} già per una energia E_0 dell'ordine di 10^{12} eV, si è in condizioni in cui l'approssimazione di BORN cade completamente in difetto. In certo senso si è in condizioni simili a quelle della catastrofe infrarossa già per quanti aventi una energia dell'ordine di $10^{12} \cdot 10^{-5}$ eV, ossia dell'ordine di alcuni milioni di eV.

Si noti che queste conclusioni, poichè sono principalmente in gioco componenti di FOURIER del potenziale del cristallo di frequenza relativamente bassa (cfr. le equazioni (39) e (40)), non sono sostanzialmente alterate nemmeno nel caso in cui si consideri un monocristallo sufficientemente grande, costituito però da atomi reali e non infinitamente pesanti. Infatti, come risulta dalla discussione del n. 3 l'agitazione termica e il rinculo finito degli atomi non modifica sostanzialmente le conclusioni tratte nel caso del « cristallo perfetto » quando sono in gioco soltanto le componenti di FOURIER di frequenza più bassa del potenziale.

Più severa invece è la limitazione imposta dal fatto che in pratica non si possono ottenere altro che monocristalli microscopici: infatti le conclusioni

precedenti varranno soltanto se l'indefinizione data dalla (35) delle righe spettrali sarà minore di k_1 . Ricordando pertanto la (42) e la (42-bis) si scorge che W potrà essere al massimo in un microcristallo dell'ordine di qualche unità. Ciò lascia sussistere la possibilità di osservare anche in un microcristallo un considerevole effetto interferenziale del tipo messo in evidenza in questo lavoro; ma non già un effetto della straordinaria entità necessaria perchè l'approssimazione di BORN cada completamente in difetto.

Resta viceversa possibile almeno in via di principio, una applicazione pratica dell'effetto che abbiamo studiato, alla generazione di quanti gamma di notevole energia, con uno spettro notevolmente diverso da quello che si ottiene usualmente per Bremsstrahlung.

SUMMARY

An interferential phenomenon due to the « Bremsstrahlung » in crystals is investigated. It is shown that the importance of this effect is increasing with the energy of the incoming particle. Some consequences of this fact are discussed.

Sull'eccesso positivo dei mesoni.

M. CINI e G. WATAGHIN

Istituto di Fisica dell'Università di Torino

(ricevuto il 16 Febbraio 1950)

Riassunto. — Sulla base della teoria sulla produzione multipla dei mesoni nell'urto nucleone-nucleone a suo tempo proposta da uno di noi, si sono sviluppati i calcoli per ottenere il valore dell'eccesso positivo differenziale dei mesoni al livello del mare. Le ipotesi assunte danno risultati validi per energie dei mesoni μ al livello del mare maggiori di 1 GeV. L'accordo con le determinazioni più recenti effettuate fino a valori dell'energia di 15 GeV è soddisfacente.

1. — Premessa.

Le determinazioni sperimentali più recenti dell'eccesso positivo dei mesoni al livello del mare ⁽¹⁾ sono state effettuate per valori delle energie assai più elevate (fino a 15 GeV) di quanto non fosse stato fatto fino a pochissimo tempo fa. Si rende pertanto necessario studiare la concordanza o meno delle diverse teorie proposte per il meccanismo della produzione dei mesoni con i risultati sperimentali citati.

In particolare può essere interessante un confronto tra la teoria della produzione plurima ⁽²⁾ e quella della produzione multipla ⁽³⁾ ⁽⁴⁾, in quanto, per valori così elevati dell'energia dei mesoni prodotti nell'urto nucleone-nucleone,

⁽¹⁾ B. G. OWEN e J. G. WILSON: *Proc. Phys. Soc.*, A **42**, 601 (1949); P. BASSI, E. CLEMENTEL, I. FILOSOFO e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 484 (1949); R. B. BRODE: *Bull. Am. Phys. Soc.*, **5**, 24 (1949).

⁽²⁾ J. HAMILTON, W. HEITLER e H. W. PENG: *Phys. Rev.*, **64**, 78 (1943); W. HEITLER e P. WALSH: *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 252 (1945); W. HEITLER e L. JANOSSY: *Proc. Phys. Soc.*, A **42**, 374 (1949); **42**, 669 (1949).

⁽³⁾ W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **101**, 533 (1936); *Zeits. f. Phys.*, **126**, 573 (1949).

⁽⁴⁾ G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **56**, 1245 (1939); *Acad. Bras. Ciencias*, **5**, 129 (1943).

le due teorie differiscono notevolmente. È stato già notato infatti che calcoli di eccesso positivo effettuati con l'ipotesi dell'emissione di un solo mesone per ogni urto, conducono ⁽⁵⁾ ad un eccesso positivo differenziale lentamente crescente con l'energia dei mesoni, fatto che sarebbe in contraddizione con i risultati delle più recenti misure di J. G. WILSON ⁽⁶⁾ ⁽⁷⁾.

La teoria di produzione multipla dei mesoni proposta da HEISENBERG, che non differisce molto da quella avanzata a suo tempo da uno di noi ⁽⁴⁾ conduce ad un eccesso positivo che varia all'incirca inversamente alla radice quadrata dell'energia dei mesoni, per valori sufficientemente elevati di questa, il che concorderebbe in modo abbastanza soddisfacente con i risultati sperimentali. L'accordo non è altrettanto soddisfacente per quanto si riferisce al valore assoluto dell'eccesso alle diverse energie.

È pertanto sembrato utile uno studio dettagliato del problema che possa definitivamente stabilire se le ipotesi che derivano dalla teoria citata ⁽⁴⁾ possano condurre ad un buon accordo con l'esperienza.

2. - Impostazione del problema.

a) *Ipotesi sulla produzione dei mesoni nell'urto nucleone-nucleone.* - I fondamenti della teoria sulla produzione multipla dei mesoni verranno richiamati altrove; qui ci limitiamo a sottolineare che il punto di partenza è l'assunzione che le leggi della meccanica quantistica devono essere modificate per le transizioni che implicano scambi di energia e quantità di movimento molto elevati, e che quindi le probabilità di queste transizioni vengono ad essere affette da un fattore di cut-off relativistico.

Conseguenza di questa assunzione è che il numero di stati di una particella racchiusa in un volume V con momento compreso in modulo tra p e $p + dp$ anziché dato dalla

$$dQ = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 dp,$$

è dato dalla

$$dQ = \frac{4\pi V}{h^3} p^2 f(p) dp,$$

essendo $f(p)$ una funzione di cut-off che tende a zero per p che tende ad ∞ .

⁽⁵⁾ P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949).

⁽⁶⁾ J. G. WILSON (non ancora pubblicato); *Edinburgh Conference*, nov. 1949.

⁽⁷⁾ Siamo grati al dott. WILSON per averci comunicato gli ultimi dati non ancora pubblicati.

Supporremo, per ragioni che verranno precisate altrove, che

$$F(p) = W^{-4}, \quad W = c\sqrt{p^2 + m^2c^2},$$

dove W è l'energia totale ed m la massa della particella.

L'assunzione fondamentale del presente lavoro è pertanto la seguente: la probabilità che, nella collisione tra due nucleoni, uno dei mesoni emessi abbia, nel sistema del baricentro dei due nucleoni (definito relativisticamente come sistema di momento totale nullo) ⁽⁸⁾, momento compreso tra p_0 e $p_0 + dp_0$ è proporzionale a

$$p_0^2 W_0^{-4} dp_0 \sim p_0 W_0^{-3} dW_0 = (W_0^2 - \mu_\pi^2 c^4)^{1/2} W_0^{-3} dW_0,$$

essendo μ_π la massa del mesone π che si ha ragione di credere venga creato nell'urto nucleone-nucleone.

Poichè è plausibile supporre isotropa la distribuzione nel sistema baricentrico, la probabilità che il mesone suddetto formi un angolo θ_0 con l'asse polare coincidente con la direzione della velocità del nucleone incidente, ed abbia energia W_0 sarà

$$(1) \quad F(W_0, \theta_0) dW_0 d\theta_0 = A p_0 W_0^{-3} \frac{\sin \theta_0}{2} d\theta_0 dW_0,$$

con A costante di normalizzazione.

Inoltre, se il sistema del baricentro dei nucleoni è in moto uniforme rispetto al sistema terrestre con velocità βc , l'energia totale di ognuno dei due nucleoni prima dell'urto è ⁽⁴⁾

$$E_0 = \gamma M c^2, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2},$$

essendo γ legato all'energia totale E del nucleone incidente nel sistema terrestre dalla

$$(2) \quad \gamma = \sqrt{(E + M c^2)/M c^2},$$

se si indica con M la massa del nucleone in quiete.

L'energia massima che può essere ceduta ad un mesone nel sistema baricentrico vale, tenendo conto della conservazione dei momenti quando un solo mesone è prodotto

$$(3) \quad W_{0m} = M c^2 (\gamma - 1/\gamma) + \mu_\pi c^2 \frac{\mu_\pi}{4 M \gamma} \cong M c^2 (\gamma - 1/\gamma).$$

Il numero medio di mesoni che un primario di energia E crea è perciò

$$(4) \quad n(\gamma) = \frac{2 k_0 \gamma M c^2}{W_0},$$

⁽⁸⁾ L'indice ₀ viene usato per le grandezze nel sistema baricentrico; le grandezze senza indice sono riferite al sistema terrestre dell'osservatore.

essendo \bar{W}_0 l'energia media dei mesoni creati nel sistema baricentrico, data da

$$(5) \quad \bar{W}_0 = \frac{\int_{\mu_\pi c^2}^{W_{0m}} p_0 W_0^{-2} dW_0}{\int_{\mu_\pi c^2}^{W_{0m}} p_0 W_0^{-3} dW_0} =$$

$$= 2\mu_\pi c^2 \frac{\ln \frac{W_{0m} + \sqrt{W_{0m}^2 - \mu_\pi^2 c^4}}{\mu_\pi c^2} - \frac{\sqrt{W_{0m}^2 - \mu_\pi^2 c^4}}{W_{0m}}}{\arccos \frac{\mu_\pi c^2}{W_{0m}} - \frac{\mu_\pi c^2}{W_{0m}} \frac{\sqrt{W_{0m}^2 - \mu_\pi^2 c^4}}{W_{0m}}} \approx \frac{\ln \frac{2W_{0m}}{\mu_\pi c^2} - 1}{\frac{\pi}{2} - \frac{\mu_\pi c^2}{W_{0m}}} 2\mu_\pi c^2$$

ed essendo k_0 la frazione di energia totale nel sistema baricentrico dei due nucleoni incidenti, ceduta in media in un urto ai mesoni creati: la determinazione di k_0 verrà fatta più avanti. Si osservi che $n(\gamma)$ è funzione di E attraverso le (2), (3), (5).

b) *Analisi della componente nucleonica generatrice di mesoni.* - La componente nucleonica responsabile della creazione dei mesoni, tenendo conto dell'isotropia della radiazione protonica primaria incidente all'ingresso nell'atmosfera, ha un'intensità globale che varia con l'altezza secondo la ⁽⁹⁾

$$(6) \quad N(E, x) = C \cdot E^{-s} \left[\exp\left(-\frac{x}{x_0}\right) + \frac{x}{x_0} Ei\left(-\frac{x}{x_0}\right) \right],$$

essendo $N(E, x)$ il numero di nucleoni con energia totale maggiore di E alla profondità atmosferica x (misurata in g/cm²). x_0 è una costante dell'ordine di 120 g/cm² ⁽¹⁰⁾ ⁽¹¹⁾.

Da questa legge si ricava che il 96 % dei nucleoni generatori di mesoni è assorbito nei primi 240 g/cm². Poichè i nostri calcoli avranno per oggetto mesoni energici ($W > 3$ GeV) non si commetterà un grosso errore supponendo tutti i mesoni prodotti alla stessa altezza, e quindi la loro energia al livello del mare ottenuta semplicemente sottraendo dall'energia W al livello di formazione, l'energia perduta per ionizzazione nell'attraversamento dell'atmosfera, dell'ordine di 1,8 GeV ⁽¹²⁾.

⁽⁹⁾ L. MYSSOWSKY e L. TUWIM: *Zeits. f. Phys.*, **36**, 615 (1926); B. GROSS: *Zeits. f. Phys.*, **83**, 214 (1933).

⁽¹⁰⁾ G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **71**, 453 (1947); *Congresso di Como* 1949; H. A. MEYER, G. SCHWACHHEIM, A. WATAGHIN e G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **76**, 598 (1949).

⁽¹¹⁾ J. TINLOT: *Phys. Rev.*, **73**, 1476 (1948); **74**, 1197 (1948); E. P. GEORGE e A. P. JASON: *Nature*, **161**, 248 (1948).

⁽¹²⁾ Questo procedimento è tanto più lecito in quanto i dati sperimentali dell'eccesso positivo differenziale sono ottenuti per un intervallo non inferiore a qualche centinaio di MeV/c attorno al valor medio del momento.

Nella (4) si è supposto che ai mesoni creati venga fornita in media una frazione costante k_0 dell'energia totale nel sistema baricentrico dei nucleoni incidenti. Infatti, volendo dare un significato relativistico a k_0 è necessario considerare le energie totali, tanto nel sistema terrestre come in quello baricentrico. È possibile allora dedurre il valore di k_0 dalla legge di variazione (6) dello spettro dei nucleoni con l'altezza, se si assume che la somma dei momenti dei mesoni creati sia, nel sistema baricentrico, nulla. In questo caso k_0 assume un significato invariante, ed anche nel sistema terrestre l'energia ceduta ai mesoni è uguale alla frazione k_0 dell'energia totale dei nucleoni prima dell'urto.

Per i valori dell'energia dei nucleoni che appaiono nei calcoli seguenti, si potrà allora utilizzare il risultato di HÖCKER ⁽¹³⁾ che ricava l'equazione di diffusione dei nucleoni nell'atmosfera nell'ipotesi che il nucleone urtante di energia cinetica E_0 ceda una frazione costante di questa εE_0 ai mesoni, mentre la rimanente energia viene suddivisa tra nucleone urtante e nucleone urtato, supponendo altresì che il primo possa assumere con uguale probabilità qualsiasi valore E dell'energia tra 0 ed $(1 - \varepsilon)E_0$, ed il secondo corrispondentemente l'energia $(1 - \varepsilon)E_0 - E$.

Allora, se si assume la sezione d'urto (con un nucleo di N o di O) per la creazione dei mesoni, indipendente dall'energia del nucleone incidente e dell'ordine di grandezza della sezione geometrica del nucleo ($\sigma \approx 4 \cdot 10^{-25}$ cm²), con il che il libero cammino medio l nell'aria si può ritenere dell'ordine di 60 g/cm² = $x_0/2$, si ottiene

$$1 - k_0 = \left(\frac{s + 1}{4} \right)^{1/s},$$

essendo s l'esponente dello spettro integrale dei protoni primari.

Assumeremo, per ragioni connesse con la distribuzione spettrale dei mesoni, e con la legge di frequenza dei grandi sciami in funzione della densità di particelle ⁽¹⁴⁾, che sia $s = 1,6$. Si ottiene allora

$$k_0 = 0,23.$$

3. - Deduzione dell'eccesso positivo.

Assumiamo che il numero dn di mesoni aventi energia totale nel sistema terrestre compresa tra W e $W + dW$, prodotti in un urto da un nucleone di energia totale E , sia dato da

$$dn = n(E)\Phi(W, E) dW.$$

⁽¹³⁾ C. H. HÖCKER: *Zeits. f. Phys.*, **124**, 351 (1947).

⁽¹⁴⁾ G. WATAGHIN: *Phys. Rev.*, **74**, 975 (1948); **75**, 693 (1949).

La funzione di probabilità $\Phi(W, E)$ si ricaverà trasformando la (1) dal sistema baricentrico a quello terrestre. Il numero medio di mesoni prodotti in un urto $n(E)$ è dato dalla (4) ed è, come abbiamo visto, funzione di E attraverso γ per mezzo delle (2), (3), (5).

Per ottenere il numero totale di mesoni con energia tra W e $W + dW$ prodotti in tutta l'atmosfera, consideriamo un punto alla profondità x , nel quale arriverà un numero di nucleoni con energia compresa tra E ed $E + dE$, inclinati dell'angolo φ rispetto alla verticale, dato da

$$d^2N = C \cdot E^{-2,6} \exp(-x/2l \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi dE.$$

Il numero di urti subiti da tutti i nucleoni con energia tra E ed $E + dE$ nello strato atmosferico di spessore dx sarà pertanto, poichè è l il libero cammino medio

$$C \cdot E^{-2,6} dE dx \int_0^{\pi/2} \exp(-x/2l \cos \varphi) \frac{\sin \varphi}{l \cos \varphi} d\varphi = -C \cdot E^{-2,6} Ei(-x/2l) \frac{dx}{l} dE.$$

Il numero di mesoni prodotti nello strato dx , alla profondità x , nell'intervallo di energia W tra W e $W + dW$ da tutti i primari è perciò

$$G(x, W) dW dx = -CEi(-x/2l) \frac{dx}{l} dW \int_{E^*}^{\infty} E^{-2,6} n(E) \Phi(W, E) dE$$

ed il numero totale di mesoni in quell'intervallo di energia prodotti in tutta l'atmosfera è perciò

$$(7) \quad g(W) dW = \int_0^{\infty} G(x, W) dx = 2C dW \int_{E^*}^{\infty} E^{-2,6} n(E) \Phi(W, E) dE.$$

Il risultato che si ottiene estendendo l'integrazione rispetto alla x fino al livello del mare ($x = 17,2 l$) è sostanzialmente identico a quello che si ha per $x = \infty$ ⁽¹⁵⁾.

Il numero di protoni primari che hanno contribuito alla creazione di questi mesoni è dato, ovviamente, da

$$(8) \quad h(W) dW = C dW \int_{E^*}^{\infty} n(E) \Phi(W, E) dE.$$

⁽¹⁵⁾ Estendere l'integrazione fino ad $x = 4l = 240$ g/cm² dà, invece del valore 2 il valore 1,926; fino ad $x = 2l = 120$ g/cm² dà 1,72. Questo significa, come si è visto, che il 96 % dei mesoni è prodotto nei primi 240 g/cm² e l'86 % nei primi 120 g/cm².

Il limite inferiore E^* sarà determinato in seguito, e rappresenta la minima energia che un nucleone deve avere perchè non sia nulla la probabilità di produrre almeno un mesone di energia W .

Il decay dei mesoni non influisce sull'eccesso positivo, perchè diminuisce nello stesso rapporto tanto i mesoni negativi che quelli positivi ⁽¹⁶⁾, e quindi l'eccesso calcolato tenendo conto di tutti i mesoni prodotti con una data energia in tutta l'atmosfera, deve mantenersi anche al livello del mare: solamente si avrà, a causa della perdita per ionizzazione, che l'eccesso $\delta(W)$ diventerà $\delta(W') = \delta(W - W_i)$; l'energia perduta per ionizzazione W_i vale, come abbiamo visto, 1,8 GeV circa.

L'eccesso positivo alla formazione si otterrà da

$$\delta(W) = 2 \frac{g^+(W) - g^-(W)}{g^+(W) + g^-(W)},$$

dove $g^+(W)dW$ è il numero di mesoni positivi con energia tra W e $W + dW$ ed analogamente $g^-(W)dW$, $g_0(W)dW$ per quelli negativi e neutri. Assumendo valida la teoria simmetrica delle forze nucleari sarà

$$g^+(W) + g^-(W) + g^0(W) = g(W); \quad g^-(W) = g^0(W) \\ g^+(W) = g^-(W) + (1/2) h(W).$$

È noto ⁽¹⁷⁾ che previsioni teoriche assegnano al mesone neutro una vita media assai breve: evidenza sperimentale esiste della formazione di quanti γ , capaci di produrre coppie di elettroni, in stelle di elevata energia osservate in emulsioni fotografiche ⁽¹⁸⁾; quanti γ che possono derivare dalla disintegrazione di mesoni neutri con vita media $\lesssim 10^{-13}$ sec; sembra infine che a Berkeley si sia potuto dimostrare ⁽¹⁹⁾ che una gran parte della radiazione γ prodotta nell'urto protone-protone si debba attribuire alla disintegrazione di mesoni neutri.

In queste ipotesi sarà perciò

$$(9) \quad \delta(W) = \frac{1}{2 \frac{g(W)}{h(W)} + \frac{1}{6}}.$$

⁽¹⁶⁾ L'effetto PANCINI-PICCIONI-CONVERSI si fa sentire solo per mesoni fine range, che non ci interessano, perchè i nostri calcoli sono eseguiti per mesoni assai più energici.

⁽¹⁷⁾ R. J. FINKELSTEIN: *Phys. Rev.*, **72**, 415 (1947); J. P. STEIMBERGER: *Phys. Rev.*, **76**, 1180 (1949).

⁽¹⁸⁾ M. F. KAPLON, B. PETERS e H. L. BRADT: *Phys. Rev.*, **79**, 1735 (1949); R. E. MARSHAK: *Phys. Rev.*, **76**, 1736 (1949).

⁽¹⁹⁾ BJORKLAND, CRANDALL, MOYER e YORK: *Phys. Rev.* (in pubblicazione).

4. - Calcolo della funzione di probabilità $\Phi(W, E)$.

La (1) si trasforma nel sistema terrestre nella

$$F(W_0, \theta_0) dW_0 d\theta_0 = F[W(W, \theta), \theta_0(W, \theta)] \frac{\partial(W_0, \theta_0)}{\partial(W, \theta)} dW d\theta.$$

Si dimostra che

$$\frac{\partial(W, \theta_0)}{\partial(W, \theta)} = 1$$

e perciò

$$(10) \quad F(W_0, \theta_0) dW_0 d\theta_0 = A \frac{p \sin \theta}{2} [\gamma(W - \beta c p \cos \theta)]^{-3} dW d\theta,$$

avendo introdotto i valori W, θ legati a W_0, θ_0 dalle trasformazioni di LORENTZ

$$(11) \quad \begin{cases} p_0 \sin \theta_0 = p \sin \theta, \\ W_0 = \gamma(W - \beta c p \cos \theta). \end{cases}$$

Sarà allora

$$(12) \quad \Phi(E, W) dW = \frac{A}{2} \frac{p}{\gamma^3} dW \int_0^{\theta_m} \frac{\sin \theta d\theta}{(W - \beta c p \cos \theta)^3}.$$

Il limite superiore, per la seconda delle (11) sarà

$$(13) \quad \cos \theta_m = \frac{\gamma W - W_{0m}}{\gamma \beta c p} \quad \text{per} \quad \gamma(W_{0m} - \beta c p_{0m}) \leq W \leq \gamma(W_{0m} + \beta c p_{0m}),$$

$$(14) \quad \cos \theta_m = -1, \quad \theta_m = \pi \quad \text{per} \quad \mu_\pi c^2 < W < \gamma(W_{0m} - \beta c p_{0m}).$$

Per $W_m = (W_{0m} + \beta c p_{0m})$ si ha

$$\cos \theta_m = 1, \quad \Phi(W, E) = 0,$$

d'accordo con il fatto che una particella emessa nel sistema baricentrico con energia W_{0m} in direzione concorde con la velocità βc di spostamento del sistema stesso rispetto a quello terrestre, non può avere valore maggiore di W_m scritto sopra.

La $\Phi(W, E)$ è, naturalmente funzione di E attraverso β e γ .

Poichè W_{cm} è funzione di γ data dalla (3) occorre determinare il valore di γ che separa i due intervalli I e II nei quali la $\Phi(W, E)$ ha forma diversa, secondo i valori di θ_m dati dalle (13), (14). Tale valore di γ risulta però < 1 per qualunque valore di $W > \mu_\pi c^2$. Questo significa che varrà per qualunque

valore di γ e quindi di E , la (13), e perciò sarà sempre

$$(15) \quad \Phi(E, W) dW = \frac{A}{2\beta\gamma} \left[\frac{1}{\gamma^2(W - \beta cp)^2} - \frac{1}{M^2 c^4 (\gamma - 1/\gamma)^2} \right] dW,$$

avendo eseguito l'integrazione (12).

Occorre infine determinare il valore E^* che compare negli integrali (7) e (8). Per far questo basterà osservare che il valore di γ per il quale la $\Phi(W, E)$ si annulla, determinato per mezzo della

$$(16) \quad \gamma^*(W - \beta^* cp) = Mc^2(\gamma^* - 1/\gamma^*),$$

che, risolta, dà

$$(17) \quad \gamma^* = \left[\frac{\frac{c^2 p^2}{2} Mc^2(W - Mc^2) + cp \sqrt{M^2 c^4 + \frac{c^2 p^2}{4} + (W - Mc^2)^2 Mc^2}}{c^2 p^2 - (W - Mc^2)^2} \right]^{1/2},$$

rappresenta il valore minimo che γ deve avere perchè sia possibile la creazione di un mesone con energia W . Dalla (2) si ricava allora subito il valore E^* .

5. - Risultati dei calcoli e confronto con le determinazioni sperimentali.

Gli integrali (7) ed (8) si possono calcolare numericamente, fissando dei valori per W , poichè sono ora noti $n(E)$, $\Phi(W, E)$ ed E^* .

La (9) dà $\delta(W)$. Si è calcolato pure il rapporto $g^+(W)/g^-(W)$ perchè alcuni autori usano questa seconda grandezza. Si è ottenuto

W	3 GeV	5 GeV	10 GeV	20 GeV
$\delta(W)$	0,27	0,23	0,20	0,16
g^+/g^-	1,31	1,27	1,22	1,17

Poichè i mesoni prodotti nello strato di formazione sono mesoni π e dallo studio dello spettro dei mesoni π e μ al livello del mare si trae che per questi valori dell'energia le determinazioni sperimentali si riferiscono ai mesoni μ prodotti dalla disintegrazione di quelli, occorre tener conto del fatto che l'energia di un mesone μ è circa 0,8 volte ⁽²⁰⁾ quella del mesone π che l'ha

⁽²⁰⁾ C. M. G. LATTES, G. P. S. OCCHIALINI e C. F. POWELL: *Nature*, **160**, 413 e 486 (1947).

generato. Tenendo conto anche della ionizzazione si ha pertanto, indicando con W'_μ l'energia dei mesoni μ osservati al livello del mare

W'_μ	0,6	2,2	6,2	14,2 GeV
g^+/g^-	(1,31)	1,27	1,22	1,17

Il primo valore è assai incerto, ed è perciò stato messo fra parentesi, perchè l'energia è troppo bassa perchè possa valere l'ipotesi della creazione dei mesoni

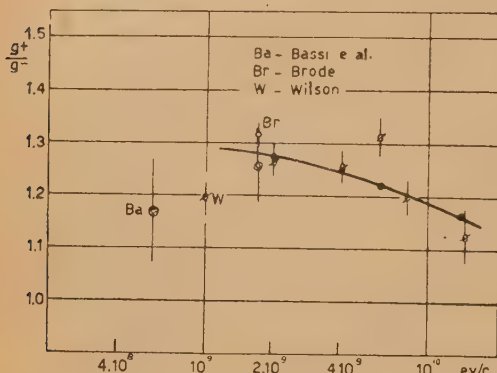


Fig. 1.

tutti alla stessa altezza; inoltre, il fatto che mesoni con queste energie sono prevalentemente prodotti da nucleoni poco energici, rende problematiche le ipotesi assunte per il calcolo di k_0 , specialmente a causa della bassa molteplicità media (per $E \leq 7$ GeV, $n(E) = 2$). Riteniamo quindi che non si possano ritenere validi i risultati di questa teoria per energie dei mesoni μ al livello del mare inferiori ad 1 GeV.

In fig. 1 è riportata la curva passante per i punti calcolati, unitamente ai risultati sperimentali più recenti con gli errori relativi. L'accordo è assai soddisfacente in tutto l'intervallo da 1 a 15 GeV. Un buon accordo con questi risultati sperimentali è ottenuto anche dai calcoli del lavoro di BASSI, CLEMENTEL, FILOSOFO e PUPPI ⁽¹⁾.

SUMMARY

Assuming the validity of a theory of multiple production of mesons in a nucleon-nucleon collision, calculations are carried out to evaluate the positive excess of μ -mesons at sea level. A probability function for the momenta of the created mesons, in the c.m. of two colliding nucleons, is assumed according to the hypothesis of a relativistic cut-off for transitions involving large exchanges of energy and momentum. The average multiplicity and the mean energy loss of nucleons are derived from experimental data on absorption and production of energetic nucleons in the atmosphere, in a relativistically invariant way. Symmetrical theory of nuclear forces, taking therefore in account the existence of neutral mesons, is assumed. The results of calculations probably do not hold for energies of μ -mesons at sea level lower than 1 GeV. In the range from 1 to 15 GeV the agreement with the last measurements is satisfactory.

Stelle di disintegrazione nucleare in emulsioni fotografiche.

L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI

Centro di studio degli ioni veloci del C.N.R. - Istituto di Fisica dell'Università di Padova

(ricevuto il 16 Febbraio 1950)

Riassunto. — Si espongono i risultati di una serie di osservazioni su stelle di evaporazione nucleare in lastre Ilford C2 esposte a 4550 m s.m., sotto spessori diversi di Pb ed Al. Le stelle a 3 rami presentano un effetto di transizione marcato fra aria e Pb e fra aria e Al. L'effetto è sensibile pure nelle lastre appoggiate sopra gli assorbitori e viene attribuito ai neutroni di evaporazione dei nuclei di Pb e di Al uscenti dai blocchi assorbitori in tutte le direzioni.

1. — Fra la primavera e l'autunno del 1949 sono state da noi esposte, in diverse riprese, delle lastre Ilford C2 e G5 nella Capanna-Osservatorio Regina Margherita sulla P. Gnifetti (Signalkuppe) del M. Rosa, a 4550 m s.m. La capanna è costruita in legno a due piani, con rivestimento esterno in lamiera di rame. Essa poggia direttamente sulla roccia della cima, ed ha orizzonte libero da ogni parte. Lo spessore medio delle pareti e del tetto si può calcolare sui 5 g/cm². Sul tetto non si accumula mai la neve.

Lo scopo delle nostre esperienze era quello di ricavare dei dati sui processi di formazione di stelle di disintegrazione nucleare e di generazione e morte dei mesoni, con lastre esposte direttamente ai raggi cosmici o schermate da vari spessori di materiali differenti.

Abbiamo da poco ultimata l'esplorazione delle lastre esposte nella prima esperienza, durata dal 21 Aprile al 7 Luglio. Si tratta di 46 lastre Ilford C2 con emulsione di 100 μ di spessore, di formato 5 \times 5 cm², poste a « sandwich », vale a dire affacciate a due a due, emulsione contro emulsione, con un velo di vernice impermeabile alla cellulosa sull'emulsione. In 420 cm² di emulsione (4,2 cm³) esplorati sono state osservate quasi 4000 stelle di 3 o più

rami. Non si tiene conto qui delle stelle a due rami, e si è ricorsi ai criteri abituali per escludere le stelle di infezione radioattiva.

Prima dell'esposizione le lastre erano rimaste al livello del mare 33 giorni dal giorno della fabbricazione. Si impiegarono 3 giorni per portarle in 3 tappe successive (a 1600, 2500 e 3600 m) da Padova alla capanna. Si ritiene che nel corso dell'esposizione, durata 76 giorni, la temperatura delle lastre sia rimasta sempre inferiore a 0 °C. Al termine dell'esposizione esse furono riportate al livello del mare in 24 ore, e mantenute costantemente a 0 °C sino al momento dello sviluppo, che ebbe luogo dopo un intervallo medio di 3-4 giorni.

Abbiamo ritenuto di poter trascurare il contributo portato dalle stelle prodottesi nel periodo precedente e seguente l'esposizione, tenendo presente anche che sulle tracce generate nel primo periodo avrà agito in maggiore misura il processo di «fading». Circa quest'ultimo noi riteniamo che non sia stato trascurabile neppure sulle tracce generate in montagna, sebbene la bassa temperatura dominante lassù abbia certamente contribuito a diminuirlo. Queste presunzioni sono basate sulle conoscenze comuni nei riguardi del «fading» e sui risultati di esperienze da noi eseguite appositamente nel frattempo, delle quali verrà quanto prima data notizia. Da queste esperienze è purtroppo risultato, fra l'altro, che la verniciatura dell'emulsione aumenta il «fading» in misura apprezzabile. Questa non fu perciò più applicata nelle esperienze successive. Il fenomeno presenta però sufficiente regolarità da far ritenere attendibili i risultati da un punto di vista relativo, cioè nei riguardi dei rapporti dei numeri di stelle osservati sotto diversi spessori di materiale, nelle medesime condizioni ambientali.

Sulla dipendenza della sensibilità dell'emulsione dalla temperatura non sono state compiute ricerche sistematiche: da misure preliminari di M. COSYNS, C. DILWORTH e G. OCCHIALINI ⁽¹⁾ risulterebbe che la diminuzione non supera il 15 % a -25 °C, per lastre C2 sviluppate secondo le loro indicazioni. Noi riteniamo perciò di poter trascurare anche questo effetto, almeno nelle misure relative.

2. - Questa prima esperienza fu eseguita allo scopo di un generale orientamento nei riguardi di entrambi i problemi in vista: generazione delle stelle e generazione dei mesoni. Fu adottato perciò un dispositivo che a priori ci sembrava potesse dare il maggior numero d'indicazioni col minimo peso di materiali schermanti, date le difficoltà del trasporto, da eseguirsi a spalla, in parte notevole su ghiacciaio, per 3000 m di dislivello. Vennero usati due castelli di piombo e d'alluminio rispettivamente della forma rappresentata in sezione verticale ed in pianta in fig. 1. Le lastre si trovavano nei vani non

(1) Nota del Centre de Physique nucléaire di Bruxelles, gentilmente inviataci.

tratteggiati nella sezione: le cifre ivi segnate indicano i numeri di « sandwich » contenuti, uno per vano all'infuori del vano centrale che ne conteneva quattro.

I blocchi furono posti al centro di una stanza a terreno, sul pavimento in legno, vale a dire in prossimità della roccia che sostiene la capanna. Si può ritenere che essi fossero esposti praticamente a radiazione diretta entro l'angolo solido 2π . Lastre di controllo furono appese al soffitto della stanza stessa e della stanza superiore. Le lastre furono sviluppate col rivelatore D19b, col metodo della variazione di temperatura, che garantisce uno sviluppo uniforme anche in profondità ⁽²⁾.

L'esplorazione fu eseguita in massima con ingrandimenti compresi fra 300 e 400 x.

3. - I risultati delle misure sulle lastre poste nei castelli sono riportati nelle tabelle I e II, relative al piombo ed all'alluminio; nella prima orizzontale è indicato il numero n di rami delle stelle considerate, nella prima colonna lo spessore di metallo che si trova sopra la lastra; i numeri di stelle sono



Fig. 1.

TABELLA I. - Stelle a n rami sotto piombo.

$\begin{matrix} n \\ \text{cm} \end{matrix}$	3	4	5-6	7-10	> 10	≥ 4	≥ 3
soffitto	$4,6 \pm 0,4$	$4,8 \pm 0,4$	$3,4 \pm 0,4$	$1,7 \pm 0,25$	$0,48 \pm 0,13$	$10,4 \pm 0,6$	$15 \pm 0,8$
0	$6 \pm 0,5$	$4,4 \pm 0,4$	$3,5 \pm 0,4$	$1,8 \pm 0,25$	$0,46 \pm 0,13$	$10,2 \pm 0,6$	$16,2 \pm 0,8$
1	$7 \pm 0,5$	$3,8 \pm 0,4$	$3,4 \pm 0,4$	$1,3 \pm 0,25$	$0,4 \pm 0,13$	$9 \pm 0,6$	$16 \pm 0,8$
2	$5,9 \pm 0,5$	$3,4 \pm 0,3$	$2,6 \pm 0,4$	$1,2 \pm 0,25$	$0,4 \pm 0,12$	$7,6 \pm 0,5$	$13,5 \pm 0,7$
4	$4,9 \pm 0,4$	$3,1 \pm 0,3$	$2,4 \pm 0,3$	$1,7 \pm 0,25$	$0,33 \pm 0,11$	$7,6 \pm 0,5$	$12,5 \pm 0,7$
6	$5,5 \pm 0,4$	$3,5 \pm 0,3$	$2,5 \pm 0,3$	$1,1 \pm 0,2$	$0,19 \pm 0,1$	$7,6 \pm 0,5$	$12,9 \pm 0,6$
11	$4,1 \pm 0,4$	$2,9 \pm 0,3$	$2,2 \pm 0,3$	$1,1 \pm 0,2$	$0,37 \pm 0,13$	$6,5 \pm 0,5$	$10,7 \pm 0,7$

⁽²⁾ C. C. DILWORTH, G. P. S. OCCHIALINI e R. M. PAYNE: *Nature*, **162**, 102 (1948).

assegnati per cm^3 e per giorno d'esposizione. La seconda orizzontale contiene i valori relativi alle lastre del soffitto: questi valori sono stati ripetuti in entrambe le tabelle per comodità di confronto.

TABELLA II. — *Stelle a n rami sotto alluminio.*

$\text{cm} \backslash n$	3	4	5-6	7-10	> 10	≥ 4	≥ 3
soffitto	$4,6 \pm 0,4$	$4,8 \pm 0,4$	$3,4 \pm 0,4$	$1,7 \pm 0,13$	$0,48 \pm 0,13$	$10,4 \pm 0,6$	$15 \pm 0,8$
0	$5,1 \pm 0,6$	$4,8 \pm 0,6$	$2,8 \pm 0,5$	$2 \pm 0,4$	$0,6 \pm 0,4$	$10,2 \pm 0,9$	$15,3 \pm 1,1$
2	$8,4 \pm 0,6$	$5,4 \pm 0,5$	$2,8 \pm 0,35$	$1,8 \pm 0,3$	$0,4 \pm 0,12$	$10,4 \pm 0,7$	$18,7 \pm 1,1$
4	$4,3 \pm 0,5$	$3,3 \pm 0,4$	$4 \pm 0,5$	$1,9 \pm 0,3$	$0,37 \pm 0,15$	$9,6 \pm 0,7$	$13,9 \pm 0,9$
6	$4,1 \pm 0,4$	$2,8 \pm 0,4$	$2,4 \pm 0,3$	$1,1 \pm 0,2$	$0,27 \pm 0,1$	$7,5 \pm 0,5$	$11,7 \pm 0,7$
11	$3,7 \pm 0,4$	$3,5 \pm 0,4$	$3 \pm 0,3$	$1,2 \pm 0,2$	$0,1 \pm 0,06$	$7,8 \pm 0,5$	$11,5 \pm 0,7$

4. — Il numero complessivo di stelle con 3 o più rami prodotte per cm^3 e per giorno nelle lastre al soffitto, $15 \pm 0,8$, riportato nell'ultima colonna delle tabelle, numero che si può almeno provvisoriamente considerare come una misura dell'intensità della radiazione primaria generatrice delle stelle, concorda con quelli trovati da GEORGE e JASON ⁽³⁾ al Jungfraujoch per lastre non schermate ($8,2 \div 8,8$) se si tiene conto delle quote rispettive (4550 e 3450), ammettendo un cammino libero medio apparente di circa 140 g/cm^2 ed una legge esponenziale d'assorbimento per la radiazione generatrice nell'aria. BERNARDINI e coll. ⁽⁴⁾ trovano invece $15,3 \text{ st/cm}^3$ al giorno sulla Testa Grigia (3500 m s.m.). È probabile che a questa discordanza abbiano contribuito sia una diversa sensibilità delle lastre, sia una diversa azione del fading. Essa conferma del resto l'opinione generale che in questo genere di esperienze abbiano un preciso significato i valori relativi ricavati dal confronto di lastre di una medesima partita, e non i valori assoluti ⁽⁵⁾.

Il confronto dei numeri relativi a diversi spessori di Pb conferma l'esi-

⁽³⁾ E. P. GEORGE e A. C. JASON: *Proc. Phys. Soc.*, **62**, 243 (1949).

⁽⁴⁾ G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **5**, 511 (1948); **6**, 456 (1949).

⁽⁵⁾ R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL (*Phil. Mag.* **40**, 862, (1949)) ottengono del resto $10,8 \text{ st/cm}^3$ e giorno al Jungfraujoch, con Kodak NT4, sensibili agli elettroni.

stenza dell'effetto di transizione osservato da BERNARDINI e coll., apprezzabile per le sole stelle a tre rami, come è stato riconosciuto da CORTINI e MANFREDINI ⁽⁶⁾. Dai nostri dati risulta anzi che il numero di stelle a 3 rami aumenta nettamente dalle lastre appese al soffitto a quelle poste semplicemente sopra il blocco di Pb (spessore 0). Questo fatto può essere di guida nell'interpretazione dell'effetto di transizione stesso, mostrando come esso sia dovuto, almeno in buona parte, ad una radiazione secondaria che viene emessa in tutte le direzioni. Il massimo numero di stelle si osserva sotto uno spessore di 1 cm di Pb (11 g/cm²).

Un effetto di transizione ben marcato si osserva pure sotto Al, con massimo a 2 cm (5,4 g/cm²), sempre per stelle a 3 rami. Si comprende che l'effetto sia sfuggito a BERNARDINI e coll. che sperimentarono con spessori più grandi. Varie considerazioni ci confortano a ritenere che esso sia reale: la cura tenuta nell'assicurare la massima uniformità di trattamento di tutte le lastre; il fatto che le lastre che rivelano l'effetto sono due distinte (sia pur riunite in « sandwich ») le quali danno valori concordanti, e infine il fatto che un'indicazione qualitativa in favore dell'esistenza del massimo ci sembra già di poter ricavare dai primi dati d'esplorazione di lastre esposte in condizioni analoghe in un'esperienza successiva.

I numeri di stelle a 3 rami registrati oltre il massimo decrescono gradualmente sia nel Pb che nell'Al, ma ancora sotto 11 cm di metallo essi non appaiono che di poco inferiori a quelli presenti nelle lastre al soffitto: si può dire che non si possono ancora distinguere con sicurezza da questi, tenuto conto dell'errore statistico.

Se passiamo a considerare le stelle a più di 3 rami non troviamo più alcun indizio sicuro di un effetto di transizione. Notiamo invece abbastanza chiaramente, e tanto meglio (compatibilmente col crescere degli errori statistici), quanto più elevato è il numero di rami, una diminuzione progressiva nel numero di stelle coll'aumento di spessore del materiale sovrapposto, indice dell'assorbimento della radiazione generatrice.

5. — L'andamento generale ora descritto trova la sua piena giustificazione nella teoria sviluppata recentemente da DALLAPORTA, MERLIN e PUPPI ⁽⁷⁾, la quale considera l'intero blocco assorbitore come un radiatore di neutroni di media energia, provenienti da evaporazioni nucleari provocate dalla radiazione primaria. Il fatto che questi neutroni abbiano una distribuzione pressochè isotropa, come l'origine supposta fa ritenere, spiega l'aumento nei numeri di stelle di pochi rami (vale a dire di bassa energia) nelle lastre poste sopra

⁽⁶⁾ G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nature*, **163**, 991 (1949).

⁽⁷⁾ N. DALLAPORTA, M. MERLIN e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **7**, 99 (1950).

il blocco, aumento confrontabile con quelli che si hanno a profondità di qualche centimetro. Anche l'ordine di grandezza degli effetti osservati concorda con quello previsto dalla teoria, sulla base dei dati disponibili.

Dalla teoria risulta chiaramente, d'altra parte, come l'andamento dell'intensità della radiazione secondaria nei vari punti del blocco assorbitore sia fortemente influenzato da fattori geometrici, cosicchè non sarebbe lecito, per es., collegare la posizione del massimo osservato nell'effetto di transizione con un cammino libero medio della radiazione secondaria stessa. Ne consegue che non è possibile con un'esperienza del genere della nostra determinare il coefficiente d'assorbimento, o il cammino libero medio, della radiazione primaria riferendosi alle stelle a 3 rami, o ad insiemi di stelle che comprendano quelle a 3 rami. Si potrà eventualmente tentare la stessa determinazione riferendosi alle stelle di 4 rami o più, in quanto queste non presentano effetto di transizione sensibile. Ma rimane pur sempre un'incertezza fondamentale circa l'influenza della distribuzione angolare della radiazione primaria, che non è nota, e che varia probabilmente coll'energia.

L'influenza del fattore geometrico, e della distribuzione di eventuali radiatori secondari intorno alla lastra, rende problematici d'altra parte i confronti fra i risultati di esperienze diverse, e può spiegare divergenze fra risultati di Autori diversi e certe anomalie nelle curve di assorbimento. Nella curva d'assorbimento relativa alle stelle di 3 ed anche di 4 rami nel Pb si nota, per es., un massimo secondario o per lo meno un flesso sotto 6 cm. Ora, le lastre in questione si trovano in situazione privilegiata per vari riguardi: anzitutto esse sono le più vicine al centro del blocco: per esse risulta massimo, con un blocco delle dimensioni adottate, il fattore di moltiplicazione delle stelle fornito dalla teoria ⁽⁶⁾; in questa posizione si trovano d'altra parte 8 lastre adiacenti anzichè 2, con una massa più notevole di vetro, ed una cavità nel Pb più ampia.

6. — Allo scopo di meglio assicurarci dell'attendibilità delle nostre misure abbiamo voluto eseguire altri confronti coi risultati degli altri sperimentatori, pur tenendo presente quanto è stato detto sopra circa l'impossibilità di un completo accordo in condizioni geometriche differenti.

Poichè CORTINI e MANFREDINI ⁽⁵⁾ prospettano l'eventualità di una perdita di stelle a tre rami in proporzione maggiore delle altre come conseguenza del fading, abbiamo voluto anzitutto confrontare le percentuali di stelle a tre rami sul totale per le lastre esposte nell'aria osservate da questi AA. e da noi: contro $5,04/14,22 = 0,35$ di questi, noi troviamo $4,54/15 = 0,30$, percentuali che si possono considerare quasi equivalenti se si tien conto degli errori.

In figg. 2 e 3 abbiamo riportato in scala logaritmica i valori nostri per i numeri di stelle a 3 e più rami in funzione degli spessori di piombo e d'alluminio, in confronto coi valori corrispondenti degli altri AA., normalizzati ponendo eguale a 100 il valore ottenuto nell'aria a distanza dall'assorbi-

tore ⁽⁸⁾: il nostro valore per lo spessore zero su Pb, e in minor misura pure quello su Al, risulta perciò > 100 .

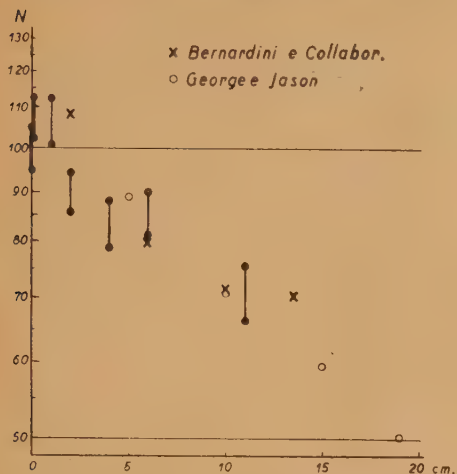


Fig. 2. - N =numero di stelle con almeno 3 rami sotto vari spessori di Piombo.

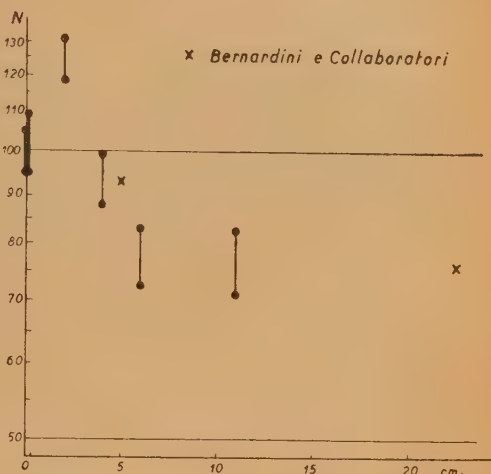


Fig. 3. - N = numero di stelle con almeno 3 rami sotto vari spessori di Alluminio.

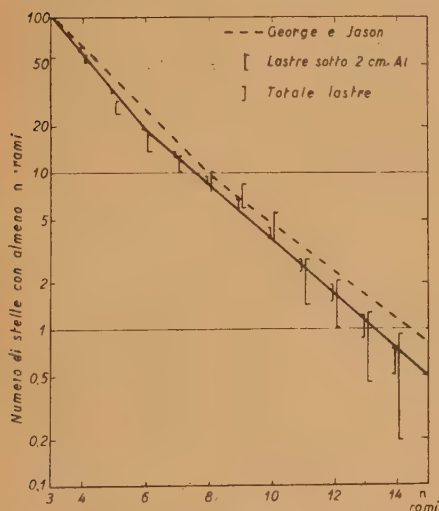


Fig. 4.

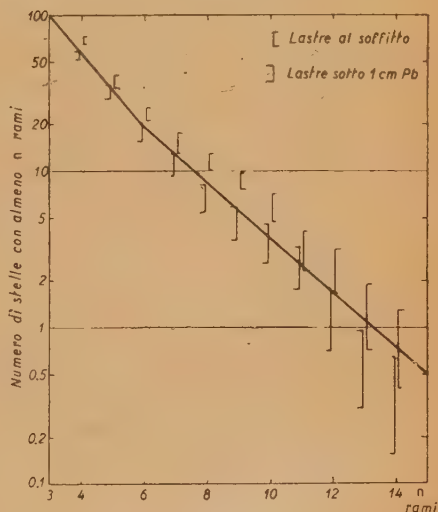


Fig. 5.

In figg. 4 e 5 riportiamo alcuni dati di numeri di stelle in funzione dei numeri di rami nelle lastre in diverse condizioni, ed in confronto con dati

⁽⁸⁾ Sebbene non abbiamo trovata un'indicazione esplicita in proposito nei lavori di BERNARDINI e coll., riteniamo che il punto a 0 da loro assegnato si riferisca a lastre lontane dai blocchi assorbitori, visto che il valore è comune a Pb ed Al.

analoghi di GEORGE e JASON ⁽³⁾ (curva tratteggiata). Se l'andamento generale concorda con quello assegnato da questi AA. la presenza dell'effetto di transizione si fa sentire nei nostri diagrammi dagli scarti verso l'alto dei punti relativi alle lastre nell'aria e verso il basso di quelli relativi alle lastre sotto 1 cm Pb e 2 cm Al rispetto alla curva continua (riprodotta in entrambi i diagrammi), relativa all'insieme di tutte le stelle.

Dai dati su esposti abbiamo cercato infine di calcolare dei valori dei cammini liberi medi della radiazione generatrice delle stelle in Pb ed Al considerando rispettivamente i numeri di stelle con $n > 4$ rami e con $n > 5$ rami. Applicando il metodo dei minimi quadrati si ottiene rispettivamente:

	$n > 4$	$n > 5$
λ_{Pb}	320 g/cm ²	280 g/cm ²
λ_{Al}	90 »	110 »

La sezione efficace del nucleo di Pb risulterebbe di qui notevolmente minore della sezione geometrica, in accordo coi dati di altri AA., mentre quella dell'Al risulterebbe assai prossima alla sezione geometrica.

I dati relativi alle stelle di $n > 4$ sono riportati, sempre in scala logaritmica, in figg. 6 e 7.

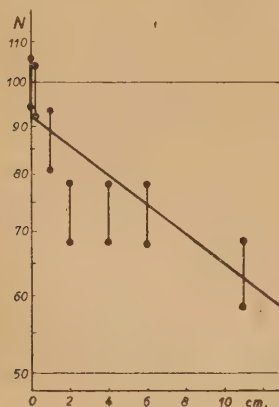


Fig. 6. — N = numero di stelle con almeno 4 rami sotto vari spessori di Piombo.

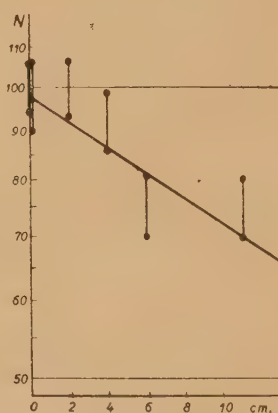


Fig. 7. — N = Numero di stelle con almeno 4 rami sotto vari spessori di Alluminio.

7. — La conclusione più importante che ci sembra di poter trarre dalle nostre misure è quella, ripetutamente accennata, che il fattore geometrico ha un valore predominante nel determinare i numeri di stelle a pochi rami sotto i vari

assorbitori. Perciò nelle esperienze eseguite successivamente, per le quali è ora in corso l'esplorazione delle lastre, si è cercato di adottare delle condizioni particolarmente semplici e simmetriche, pur senza rinunciare a una fine graduazione dei piccoli spessori.

Siamo lieti di poter qui ringraziare i proff. N. DALLAPORTA e G. PUPPI per il contributo alla discussione delle esperienze e dei risultati, le dott. L. BAGALÀ, G. BELLIBONI e L. FABBRICHESI per l'aiuto nell'esplorazione delle lastre, l'ANIDEL per un contributo al finanziamento delle esperienze, ed infine i custodi della Capanna Regina Margherita ALDO CATELLA e PIERO BUSCA per la collaborazione volenterosa e intelligente nel trasporto, nella sistemazione e nella custodia dei dispositivi d'esperienza.

SUMMARY

The results of some experiments on evaporation stars in Ilford C2 nuclear research emulsions are described. The plates have been exposed at 4550 meters a.s.l., under different thicknesses of Pb and Al. Stars with 3 branches show a marked transition effect both between air and Pb and between air and Al. Also plates placed at the top of the absorbers show the same effect, i.e. a measurable increase in the frequency of small stars. The effect is explained as being due to the neutrons emitted isotropically from the evaporation of the absorbers nuclei.

LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

Sulla cinetica delle reazioni di dissociazione. II.

G. CARERI

Istituto di Fisica dell'Università

Centro di Fisica nucleare del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma

(ricevuto il 31 Gennaio 1950)

Dietro Consiglio del Prof. E. A. GUGGENHEIM dell'Università di Reading, Inghilterra, che qui desidero ringraziare per il suo vivo interessamento, abbiamo preso in esame un modello molecolare più approssimato dell'oscillatore armonico quantizzato già usato da noi ⁽¹⁾ nel calcolo della velocità di dissociazione delle molecole biatomiche.

Una trattazione esatta del problema porterebbe ad esprimere l'energia dello stato caratterizzato dal numero quantico di vibrazione n e dal numero quantico di rotazione j nella forma ⁽²⁾

$$(1) \quad \frac{\varepsilon}{hc} = n\omega_0 - n^2x_0\omega_0 + j(j+1)B_0 - j^2(j+1)^2D_e - nj(j+1)\alpha,$$

ove x_0 , ω_0 , B_0 , D_e ed α sono costanti che si possono ricavare da dati spettroscopici ⁽³⁾. L'energia espressa dalla (1) è relativa allo stato fondamentale $n = 0$ ed $j = 0$. Dato che nel campo di temperature usuali la rotazione è sempre eccitata classicamente, possiamo semplificare notevolmente il calcolo separandola dalla vibrazione e trascurando il termine misto $nj(j+1)\alpha$. Dato il piccolo valore di α , il contributo del termine misto può essere trascurato in confronto al termine quadratico in n almeno per i primi stati quantici di vibrazione e di rotazione, che hanno a temperatura ambiente il maggiore peso statistico. Poichè l'aver tenuto conto solo del termine quadratico in n porterà ad una ben piccola correzione della formula finale, questa approssimazione risulta « a posteriori » ben giustificata.

⁽¹⁾ G. CARERI: *Nuovo Cimento*, **6**, 94 (1949). In questo lavoro la velocità di ricombinazione degli atomi liberi è stata scritta per errore in $\text{cm}^3/\text{molecole}^2 \text{ sec}$ invece che in $\text{cm}^6/\text{molecole}^2 \text{ sec}$.

⁽²⁾ È questa l'espressione degli autovalori dell'energia quando si assume un potenziale del tipo di MORSE. Cfr. L. PAULING e E. B. WILSON: *Introduction to quantum Mechanics* (New York, 1935), pag. 271. A questo proposito ricordiamo che la deformazione apportata alla curva di MORSE dal potenziale della forza centrifuga porta ad una correzione di ε^* completamente trascurabile in queste applicazioni. Cfr. S. GLASSSTONE, K. I. LAIDLER e H. EYRING: *The theory of rate processes* (New York, 1941), pag. 131.

⁽³⁾ Una raccolta di queste costanti si trova, ad es., in J. E. MAYER e M. G. MAYER: *Statistical Mechanics* (New York, 1946).

Consideriamo allora una molecola nell'ennesimo livello di vibrazione. Perchè essa si dissocia è necessario che le venga fornita l'energia

$$(2) \quad \varepsilon = \varepsilon^* - n h \nu + n^2 \beta (h \nu)^2$$

ove ε^* è al solito l'energia di dissociazione, e β vale $1/4\varepsilon^*$.

Ponendo nella (2) $\varepsilon = 0$, si vede facilmente che lo stato dissociato corrisponde al numero quantico $2\varepsilon^*/h\nu$.

Ricordando che la probabilità che in una collisione la somma dell'energia di rotazione più quella di traslazione lungo la linea dei centri sia compresa fra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$ vale:

$$(3) \quad \frac{\varepsilon}{kT} \exp. [-\varepsilon/kT] \frac{d\varepsilon}{kT},$$

per la probabilità di dissociazione di una molecola nell'ennesimo stato quantico di vibrazione avremo:

$$(4) \quad \int_{\varepsilon^* - n h \nu + n^2 \beta (h \nu)^2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{kT} \exp [-\varepsilon/kT] \frac{d\varepsilon}{kT} = \exp [-(\varepsilon^* - n h \nu + n^2 \beta (h \nu)^2)/kT] \times \\ \times \left(1 + \frac{\varepsilon^* - n h \nu + n^2 \beta (h \nu)^2}{kT} \right).$$

Un calcolo simile si deve fare per tutti gli stati quantici compresi fra il livello fondamentale ed il livello $2\varepsilon^*/h\nu - 1$, attribuendo ad ogni livello il peso

$$(5) \quad (1 - \exp [-h\nu/kT]) \exp [-(n h \nu + n^2 \beta (h \nu)^2)/kT].$$

Il fattore tra parentesi è la funzione di ripartizione ancora relativa all'oscillatore armonico quantizzato; essa non è stata corretta perchè l'influsso del termine quadratico apporterebbe modifiche assolutamente negligibili nei riguardi di questo lavoro.

La probabilità che in una collisione la somma delle tre energie superi ε^* risulta dunque dalla somma dei prodotti della (5) per la (4) cioè

$$(6) \quad P_d = (1 - \exp [-h\nu/kT]) \exp [-\varepsilon^*/kT] \sum_0^{2\varepsilon^*/h\nu-1} \left(1 + \frac{\varepsilon^* - n h \nu + n^2 \beta (h \nu)^2}{kT} \right).$$

Effettuando i calcoli si trova

$$(7) \quad P_d = (1 - \exp [-h\nu/kT]) \exp [-\varepsilon^*/kT] \times \\ \times \left[\frac{1}{12} \frac{h\nu}{kT} - 1 + \frac{\varepsilon^*}{kT} \left(2 \frac{kT}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\varepsilon^*}{kT} \right)^2 \frac{2}{3} \frac{kT}{h\nu} \right].$$

Nel caso dell'oscillatore armonico quantizzato (corrispondente a $\beta = 0$ nella (2)), si era ottenuto

$$(8) \quad P_d = (1 - \exp [-\varepsilon^*/kT]) \exp [-\varepsilon^*/kT] \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{kT}{h\nu} \right) \frac{\varepsilon^*}{kT} + \frac{1}{2} \frac{kT}{h\nu} \left(\frac{\varepsilon^*}{kT} \right)^2 \right].$$

Come si vede l'influenza del termine correttivo è piuttosto piccola: infatti il termine prevalente $(\varepsilon^*/kT)^2$ risulta variato solo di un fattore 4/3.

La velocità di dissociazione sarà uguale al prodotto del numero di collisioni per unità di volume e di tempo per la probabilità sopra trovata e per un fattore α che indica ancora la probabilità che la dissociazione avvenga effettivamente quando le condizioni energetiche sono soddisfatte:

$$(9) \quad k_d = \frac{2\alpha D^2}{\sigma} \left(\frac{2\pi kT}{\mu} \right)^{1/2} P_d,$$

ove tanto le unità di misura che gli altri simboli sono definiti nella nota precedente (1).

Per raggiungere una maggiore precisione nella determinazione di α invece di impiegare per D diametro d'urto efficace, il valore del diametro molecolare quale si deduce dalla teoria cinetica dei gas, impiegheremo adesso un valore corretto per tenere conto del campo repulsivo molecolare. Uno studio accurato (4) delle collisioni attivate porta infatti ad assumere per il diametro d'urto efficace un valore più piccolo dell'usuale diametro cinetico D_0 . Per una trattazione approssimata è sufficiente considerare una riduzione del tipo

$$D^2 = D_0^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{kT_a} \right)^{-2/l} = D_0^2 \gamma^{-1},$$

dove ε_1 è l'energia di attivazione che viene fornita dai soli gradi di libertà di traslazione e T_a la temperatura alla quale è stata fatta l'esperienza (ad esempio di viscosità) intesa a determinare D_0 , ed l un numero usualmente compreso fra 8 e 12 che caratterizza la pendenza del campo repulsivo. Evidentemente ε_1 dipende dallo stato di eccitazione della molecola, ma noi possiamo assumere un valore medio $\varepsilon_1 = \varepsilon^*/2$ pensando che metà dell'energia di attivazione deve essere fornita dai tre gradi di libertà di traslazione, e l'altra metà dai gradi interni, che sono tra due e quattro per i diversi modelli.

È questa una grossolana approssimazione, ma è quanto di meglio si possa fare in vista della nostra ignoranza sulla forma esatta del campo repulsivo; e d'altra parte per fortuna la dipendenza di D da ε_1 è così debole che una migliore scelta non influenzerebbe il risultato.

Applicando questa correzione ai diametri si trova che per γ si deve prendere un valore che varia tra 2 e 2,5 quando ε^*/kT varia tra 284 e 59 come nel caso nostro. Questa correzione va apportata ai modelli II, III, IV ed al V che corrisponde all'uso della (7). Per il modello I, sfere dure senza gradi interni di libertà, evidentemente $\varepsilon_1 = \varepsilon^*$. I dati relativi a questo modello corretto sono riportati sotto I_c , mentre abbiamo ancora riportato la colonna I ottenuta con il normale uso della « crude collision theory » per cui $D = D_0$.

I valori di α che abbiamo ricalcolato sono riportati nella tabella I a pagina seguente.

Come si vede tanto l'ulteriore approssimazione che la correzione dei diametri non alterano le conclusioni che nella nota precedente sono state dedotte dalla tabella dei valori di α .

(4) G. CARERI: *Atti Acc. Naz. Lincei* 7, 232 (1949).

TABELLA I.

	ε^*/kT	I	$h\nu/kT$	Valori di α					
				I	I _c	II	III	IV	V
H ₂	173	0,467	20,4	77,5	209	1,09	0,0128	0,228	0,203
N ₂	284	13,84	11,5	77,5	232	7,30	0,0510	0,576	0,464
Br ₂	76	341,9	1,56	79,0	188	2,13	0,0517	0,114	0,090
J ₂	59	740,5	1,07	137,0	310	4,50	0,1560	0,246	0,186

Numerazione di impulsi registrati su filo d'acciaio.

T. FRANZINI e L. MUSUMECI

Accademia Navale, Livorno

(ricevuto il 24 Febbraio 1950)

La possibilità di registrare un numero molto elevato di impulsi per unità di tempo è limitata dalle costanti di tempo del contatore, della registrazione e, soprattutto, dalle caratteristiche meccaniche del numeratore finale.

Sia n il numero massimo di impulsi equidistanziati che detto numeratore è capace di registrare nell'unità di tempo. Se N impulsi sono distribuiti nella stessa unità di tempo secondo la legge del caso, si può ammettere che le perdite di conteggio dipendano da una grandezza k che, nel nostro caso, è data da:

$$(1) \quad k = \sqrt{\frac{n}{N}}.$$

Per ridurre sufficientemente le perdite di conteggio anche per valori molto elevati di N , il metodo di gran lunga più usato oggi è quello delle scale di demoltiplicazione (a potenza del 2 o, più comodamente, a decadi) i cui responsi sono molto sicuri. In definitiva esse sostituiscono ad N della (1) un valore $N' = N/2^a$, oppure $N' = N/10^b$, adatto a ridurre le perdite di conteggio entro limiti tollerabili.

Mentre nel nostro laboratorio erano in costruzione alcune di queste scale,

abbiamo studiato anche la possibilità di registrazione mediante impressione degli impulsi su filo d'acciaio con un sistema tipo magnetofono. Il filo, che contiene la registrazione, può essere successivamente fatto scorrere a velocità ridotta per numerare gli impulsi che risultano così diradati nel tempo. Ciò ha lo stesso effetto che aumentare il valore di n nella (1).

Rispetto alle scale di demoltiplicazione, il metodo permette di registrare frequenze meno elevate ma presenta il vantaggio di conservare, per una data registrazione, non solo il numero totale di impulsi ma altresì la distribuzione di questi in funzione del tempo.

Il dispositivo da noi realizzato è costituito da un contatore G.M. che trasmette impulsi di frequenza media N_1 ad un amplificatore dal quale passano al magnetofono che li registra sul filo che scorre a velocità V_1 . Ultimata la registrazione, il filo impressionato è fatto ripassare attraverso i poli del magnetofono a velocità $V_2 < V_1$.

Gli impulsi uscenti dal magnetofono vengono amplificati, dopo di che vanno al numeratore attraverso una valvola a gas.

Essendo:

V_1 = velocità di registrazione
 V_2 = » » ritrasmissione
 N_1 = frequenza media di entrata
 N_2 = » » uscita

vale la:

$$(2) \quad N_1 = N_2 \frac{V_1}{V_2}.$$

Dalla quale si vede che, per un prefissato limite tollerabile della perdita di conteggio, la frequenza media registrabile è V_1/V_2 volte maggiore; oppure, per una data frequenza media di entrata N_1 ; la grandezza k risulta moltiplicata per $\sqrt{V_1/V_2}$.

L'esperienza è stata eseguita per $V_1/V_2 = 10$, controllando che per frequenze sufficientemente basse il numero totale degli impulsi registrati a velocità V_1 tendesse al numero di quelli ritrasmessi.

La possibilità di aumentare il rapporto V_1/V_2 è legata ai seguenti fatti:

1) Ogni riduzione di V_2 rispetto a V_1 porta di conseguenza (nella ritrasmissione) una diminuzione delle f.e.m. indotte e richiede quindi una maggiore amplificazione degli impulsi.

2) Poichè nelle varie fasi di amplificazione, registrazione, ritrasmissione, ecc., si accumulano disturbi, il rumore di fondo risulta inevitabilmente amplificato determinando un limite superiore per il rapporto V_1/V_2 .

Rispetto a questi limiti, quello imposto dalle frequenze massime registrabili su filo (frequenze acustiche) alle velocità considerate ($V_1 = 50-60$ cm/sec) non è da prendere in considerazione.

È ovvia la possibilità di usare il dispositivo per numerare in un breve tempo impulsi (a frequenza particolarmente bassa) registrandoli su filo fatto scorrere a velocità ridotta e numerandoli con filo scorrente a velocità maggiore.

Eccesso positivo e molteplicità di produzione dei mesoni.

P. CALDIROLA

Istituto di Fisica dell'Università di Milano

A. LOINGER

Istituto di Fisica dell'Università di Pavia

(ricevuto il 3 Marzo 1950)

In una Nota precedente uno di noi ⁽¹⁾ ha sviluppato una teoria della componente mesonica della radiazione cosmica partendo dall'ipotesi dell'esistenza al limite superiore dell'atmosfera di una componente primaria protonica dallo spettro energetico (integrale) del tipo $P(E) = P_0 E^{-s}$ ($s = 1,8$) e supponendo che i mesoni π siano generati nell'urto fra due nucleoni attraverso processi del tipo:

$$(S_1) \quad \begin{aligned} P+P &= \begin{cases} P+P+\pi^0 \\ P+N+\pi^+ \end{cases} & N+N &= \begin{cases} N+N+\pi^0 \\ N+P+\pi^- \end{cases} & \begin{aligned} P+N \\ N+P \end{aligned} &= \begin{cases} P+N+\pi^0 \\ P+P+\pi^- \\ N+N+\pi^+ \end{cases} \end{aligned}$$

Nell'ipotesi che le varie possibilità relative a ogni singolo processo d'urto siano egualmente probabili, che il nucleone urtante di energia cinetica E ceda in un singolo urto una frazione ε^*E della sua energia al mesone creato mentre, la rimanente parte $(1 - \varepsilon^*)E = \varepsilon E$ venga suddivisa fra il nucleone diffuso e quello urtato, in modo che ciascuno di questi possa assumere con eguale probabilità tutti i valori dell'energia compresi fra 0 e εE , si arriva alle seguenti equazioni per la distribuzione dei protoni e dei neutroni nell'atmosfera:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial P(E, l)}{\partial l} &= P(E, l) - \frac{5}{4\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} P(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' - \frac{3}{4\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} N(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' \\ -\frac{\partial N(E, l)}{\partial l} &= N(E, l) - \frac{5}{4\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} N(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' - \frac{3}{4\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} P(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' \end{aligned} \right.$$

le cui soluzioni sono le seguenti

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} P(E, l) &= \frac{P_0}{2} E^{-s} [\exp(-\alpha l) + \exp(-\beta_1 l)] \\ N(E, l) &= \frac{P_0}{2} E^{-s} [\exp(-\alpha l) - \exp(-\beta_1 l)] \end{aligned} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{2\varepsilon^s}{s+1} \cong 0,50 \\ \beta_1 &= 1 - \frac{\varepsilon^s}{2(s+1)} \cong 0,875. \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ P. CALDIROLA: *Nuovo Cimento*, **6**, 565 (1949); nel seguito indicato con I).

Assumendo lo schema (S_1) per la produzione dei mesoni, tenendo conto della trasformazione $\pi \rightarrow \mu$, della β -disintegrazione dei mesoni μ e della perdita di energia per ionizzazione, si arriva alle seguenti equazioni per la distribuzione dei mesoni (per le notazioni cfr. I):

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial g_1^\pm(W, l)}{\partial l} = \frac{P_0}{24} \frac{s}{q} \left(\frac{W}{q}\right)^{-s-1} [7 \exp(-\alpha l) \pm 3 \exp(-\beta_1 l)] - B \frac{g_1^\pm(W, l)}{Wl} + \delta \frac{\partial g_1^\pm(W, l)}{\partial W} & (\text{per } W > W_0 = qE_\pi \cong 4 \text{ GeV}) \\ \frac{\partial g_1^\pm(W, l)}{\partial l} = -B \frac{g_1^\pm(W, l)}{Wl} + \delta \frac{\partial g_1^\pm(W, l)}{\partial W} & (\text{per } W \leq qE_\pi \cong 4 \text{ GeV}) \end{cases}$$

le cui soluzioni sono le seguenti:

$$(4) \quad \begin{cases} g_1^\pm(W, l) = R(W, l)[7\Phi_\alpha(W, l) \pm 3\Phi_{\beta_1}(W, l)] & (\text{per } W > W_0) \\ g_1^\pm(W, l) = R(W, l)[7\Phi_\alpha(W_0, l) \pm 3\Phi_{\beta_1}(W, l)] & (\text{per } W \leq W_0) \end{cases}$$

dove si sono introdotte le funzioni:

$$(5) \quad R(W, l) = \frac{P_0}{24} \frac{s}{q} \left(\frac{\delta}{q}\right)^{-s-1} \left(\frac{W}{\delta}\right)^{\frac{B/\delta}{l+W/\delta}}$$

$$(6) \quad \Phi_\varrho(W, l) = \int_0^l \exp(-\varrho x) x^{\frac{B/\delta}{l+W/\delta}} \left(\frac{W}{\delta} + l - x\right)^{-\frac{B/\delta}{l+W/\delta}-s-1} dx.$$

Partendo da queste formule si è calcolato, fra l'altro, l'eccesso positivo

$$\varepsilon_1(W, l) = 2 \frac{g_1^+(W, l) - g_1^-(W, l)}{g_1^+(W, l) + g_1^-(W, l)}$$

della componente mesonica, che risulta dato (al livello del mare) dalla curva a) di fig. 1: per energie dei mesoni fino a 3 GeV si ha un buon accordo con i risultati sperimentali di BASSI e coll. ⁽²⁾ e di WILSON ⁽³⁾; per energie superiori, alcune prime misure di WILSON sembravano denotare una diminuzione di ε con l'energia, che poteva essere pensata ⁽⁴⁾ come un'indicazione che i nucleoni di energia superiore a qualche decina di GeV possano dar origine a mesoni prevalentemente attraverso processi con molteplicità superiore a uno.

Recentemente WILSON ⁽⁵⁾ ha esteso le sue misure di eccesso positivo fino ad energie mesoniche di 13 GeV, confermando la diminuzione dell'eccesso positivo con l'energia. Ci siamo pertanto proposti di esaminare se questa diminuzione poteva

⁽²⁾ P. BASSI, E. CLEMENTEL, I. FILOSOFO e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, **6**, 484 (1949).

⁽³⁾ J. G. WILSON: *Comunicazione al Congresso di Como* (Settembre 1949).

⁽⁴⁾ Cfr. nota ⁽³⁸⁾ a pag. 582 in I).

⁽⁵⁾ Ringraziamo il prof. G. WATAGHIN che gentilmente ci ha comunicato questi dati.

realmente essere attribuita all'intervento di processi multipli. Allo scopo abbiamo calcolato l'influenza esercitata sulla distribuzione dei mesoni (+ e -) dall'intervento nella generazione dei mesoni di processi con molteplicità due, secondo il seguente schema:

$$(S_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P + P = \begin{cases} P + P + \pi^0 + \pi^0 \\ P + P + \pi^+ + \pi^- \\ P + N + \pi^0 + \pi^+ \\ N + N + \pi^+ + \pi^+ \end{cases} \quad N + N = \begin{cases} N + N + \pi^0 + \pi^0 \\ N + N + \pi^+ + \pi^- \\ N + P + \pi^0 + \pi^- \\ P + P + \pi^- + \pi^- \end{cases} \\ \\ P + N = \begin{cases} P + N + \pi^0 + \pi^0 \\ P + N + \pi^+ + \pi^- \\ P + P + \pi^0 + \pi^- \\ N + N + \pi^0 + \pi^+ \end{cases} \end{array} \right.$$

(al solito si ritiene che le diverse possibilità in ogni singolo processo d'urto siano egualmente probabili). Sotto ipotesi del tutto analoghe a quelle assunte in I), si arriva alle seguenti equazioni per la distribuzione dei protoni e dei neutroni nell'atmosfera:

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial P(E, l)}{\partial l} = P(E, l) - \frac{9}{8\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} P(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' - \frac{7}{8\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} N(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' \\ -\frac{\partial N(E, l)}{\partial l} = N(E, l) - \frac{9}{8\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} N(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' - \frac{7}{8\varepsilon} \int_{E/\varepsilon}^{\infty} P(E', l) \frac{E}{E'^2} dE' \end{array} \right.$$

le cui soluzioni sono le seguenti:

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} P(E, l) = \frac{P_0}{2} E^{-s} [\exp(-\alpha l) + \exp(-\beta_2 l)] \\ N(E, l) = \frac{P_0}{2} E^{-s} [\exp(-\alpha l) - \exp(-\beta_2 l)] \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 - \frac{2\varepsilon^s}{s+1} \cong 0,50 \\ \beta_2 = 1 - \frac{\varepsilon^s}{4(s+1)} \cong 0,94 \end{array} \right.$$

Corrispondentemente si possono stabilire le seguenti equazioni per la distribuzione dei mesoni prodotti in processi « doppi »:

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g_2^{\pm}}{\partial l} = \frac{P_0 s}{8} \left(\frac{2W}{q} \right)^{-s-1} [9 \exp(-\alpha l) \pm 3 \exp(-\beta_2 l)] - B \frac{g_2^{\pm}(W, l)}{Wl} + \delta \frac{\partial g_2^{\pm}(W, l)}{\partial W} \\ \frac{\partial g_2^{\pm}}{\partial l} = -B \frac{g_2^{\pm}(W, l)}{Wl} + \delta \frac{\partial g_2^{\pm}(W, l)}{\partial W} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \left(W > \frac{W_0}{2} \right) \\ \left(W \leq \frac{W_0}{2} \right) \end{array}$$

le cui soluzioni sono date da:

$$(4') \quad \begin{cases} g_2^\pm(W, l) = \frac{3}{2^{s+1}} R(W, l) [9\Phi_\alpha(W, l) \pm 3\beta_2 \Phi(W, l)] & \left(W > \frac{W_0}{2}\right) \\ g_2(W, l) = \frac{3}{2^{s+1}} R(W, l) \left[9\Phi_\alpha\left(\frac{W_0}{2}, l\right) \pm 3\Phi_{\beta_2}\left(\frac{W_0}{2}, l\right)\right] & \left(W \leq \frac{W_0}{2}\right) \end{cases}$$

dove le $\Phi_\alpha(W, l)$ e $R(W, l)$ sono ancora date dalle (5) e (6). La curva *b*) di fig. 1 rappresenta l'eccesso positivo (al livello del mare) dei mesoni derivanti da processi «doppi». Come si vede è $\varepsilon_2(W)$ sensibilmente inferiore a $\varepsilon_1(W)$. Abbiamo poi sup-

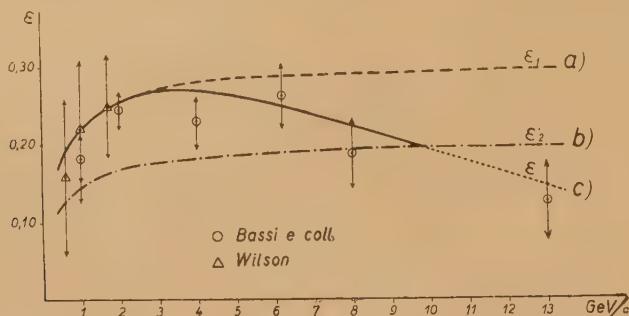


Fig. 1. — Eccesso positivo differenziale al livello del mare: a) curva teorica per soli processi «singoli»; b) curva teorica per soli processi «doppi», c) curva teorica per processi a molteplicità variabile.

posto che dei mesoni $g(W)$ di energia W che si osservano al livello del mare, una frazione $a(W)$ siano stati creati attraverso processi «doppi» e una frazione $1 - a(W)$ attraverso processi «singoli». Si è cioè assunto:

$$g^\pm(W, 20) = [1 - a(W)]g_1^\pm(W, 20) + a(W)g_2^\pm(W, 20).$$

Di conseguenza l'eccesso positivo risulta dato da (con ovvia semplificazione dei simboli):

$$\varepsilon(W) = 2 \frac{g^+(W) - g^-(W)}{g^+(W) + g^-(W)} = 2 \frac{[1 - a(W)][g_1^+(W) - g_1^-(W)] + a(W)[g_2^+(W) - g_2^-(W)]}{[1 - a(W)][g_1^+(W) + g_1^-(W)] + a(W)[g_2^+(W) + g_2^-(W)]}.$$

Per mezzo di questa formula abbiamo determinato la funzione $a(W)$ imponendo a condizione che la $\varepsilon(W)$ risultante rappresentasse nel miglior modo possibile i risultati sperimentali (cioè coincidesse con la curva *c*) di fig. 1). Una siffatta determinazione della $a(W)$ risulta possibile per $W < \sim 10$ GeV, e per tali valori la $a(W)$ ha l'andamento della curva di fig. 2. Per $W > \sim 10$ GeV non è invece più possibile, ammettendo l'esistenza di soli processi «singoli» e «doppi», di ottenere una curva dallo stesso andamento di quella sperimentale (sarebbero richiesti per $a(W)$ dei valori superiori all'unità): ciò sta a significare che a quelle energie diventano efficaci processi di produzione dei mesoni con molteplicità superiore a due.

È interessante osservare che la curva di distribuzione dei mesoni al livello del mare:

$$g(W) = g^+(W) + g^-(W) = [1 - a(W)]g_1(W) + a(W)g_2(W)$$

decresce, per $W > \sim 3$ GeV, più rapidamente che non la corrispondente $g_1(W)$, la quale per W elevato tende ad un andamento del tipo $\div W^{-s}$: questo fatto sembra in accordo con le misure sperimentali relative alla distribuzione dei mesoni ν loci.

In base ai risultati dei nostri calcoli parrebbe di poter concludere che nell'urto fra due nucleoni si ha produzione, praticamente «singola» di mesoni finchè l'energia del nucleone incidente è inferiore a qualche decina di GeV; per energie comprese fra questo valore e ~ 100 GeV è sensibile, e anzi ad un certo punto prevale, la produzione con molteplicità eguale a due, mentre per energie dei nucleoni superiori a ~ 100 GeV la molteplicità diventa ancora maggiore.

Naturalmente questi nostri calcoli sono stati eseguiti assumendo un meccanismo di trasferimento di energia dal nucleone incidente a quello urtato e ai mesoni prodotti assai particolare. È difficile dire quanto sensibile sia la dipendenza dei risultati ottenuti dalle ipotesi assunte, pur essendo nostro parere che una modifica ragionevole di tali ipotesi non debba introdurre sostanziali modifiche. È poi chiaro che le considerazioni fatte in questa lettera hanno valore più che altro indicativo, data la notevole incertezza dei dati sperimentali attuali.

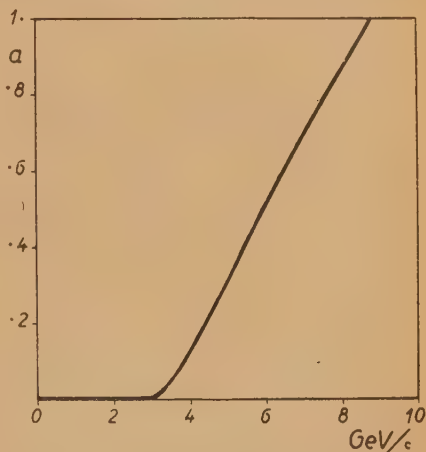


Fig. 2. — Percentuale dei mesoni osservati al livello del mare derivanti da processi «doppi».

Sul metodo del "taglio relativistico".

G. WATAGHIN

Istituto di Fisica dell'Università di Torino

(ricevuto il 3 Marzo 1950)

Lo studio dei processi di creazione e distruzione dei corpuscoli può essere fatto applicando il metodo del « taglio relativistico » (*) R.C.O. Si trova allora che le nostre possibilità di localizzare un evento nello spazio-tempo risultano necessariamente limitate.

Partendo dall'assunzione dell'esistenza di un operatore di taglio G , invariante e universale, dipendente da una lunghezza universale l , l'applicazione corretta del R.C.O. richiede che nella Lagrangiana siano sostituiti gli operatori del campo ψ_μ con operatori trasformati $\tilde{\psi}_\mu = G\psi_\mu$ e che i commutatori dei campi e dei campi canonicamente coniugati $[\tilde{\pi}_\mu, \tilde{\psi}_\mu]$ siano uguagliati ad espressioni « tagliate » ad es. con operatore G ⁽¹⁾. Per esempio considerando gli operatori $(\square - k^2)$ e $G(\square)$ commutabili, si ha che l'equazione ben nota:

$$(\square - k^2)\bar{\Delta} = -\delta(x)$$

si trasforma in:

$$\begin{aligned} (\square - k^2)\bar{\tilde{\Delta}} &= (\square - k^2)G\bar{\Delta} = \\ &= -G\delta(x) = -\tilde{\delta}(x). \end{aligned}$$

Per il prodotto di due operatori $\tilde{\psi}_\mu, \tilde{\psi}_\nu$ il metodo R.C.O. può essere formulato coll'uso dei fattori dipendenti dagli invarianti $(p'_\mu \mp p''_\mu)(p'^\mu \mp p''^\mu)$ ⁽²⁾. Allora i termini d'interazione contenenti prodotti di due o più operatori $\psi_\mu(x'), \psi_\nu(x'')$ risultano tagliati con operatore-funzione delle differenze $p'_\mu - p''_\mu$, ed in questo caso l'interazione dà luogo ad una probabilità di transizione, limitata dal fattore di taglio, quando questa transizione corrisponde ad una variazione notevole di energia o di quantità di moto.

Postuliamo che l'operatore di taglio commuta con la trasformazione di LORENTZ. Per esempio un operatore invariante del tipo $G = (l^2\square + 1)^{-1}$ soddisfa questa condizione. Il contenuto fisico di queste ipotesi corrisponde ad una eliminazione sistematica del concetto dell'evento puntiforme dalla teoria. Ogni equazione, ogni rappresentazione delle leggi fisiche deve essere invariante rispetto ad una sostituzione di x_μ con $x_\mu + \delta x_\mu$ ove $|\delta x_\mu| < l$. Si può facilmente mostrare che la teoria sopra citata soddisfa questa condizione pur restando relativisticamente invariante in virtù della commutabilità dell'operatore G con la trasformazione di LORENTZ. L'intro-

(*) « relativistic cut off », che verrà abbreviato in seguito con la notazione R.C.O.

⁽¹⁾ G. WATAGHIN: *La Ricerca Scientifica*, 2, 9-10, 517 (1936); *Phys. Rev.*, 56, 1245 (1939).

⁽²⁾ G. WATAGHIN: *ZS. f. Phys.*, 88, 92 (1934); 92, 547 (1934); I. RAYSKI: *Acta Physica Polonica*, 9, 87 (1948).

duzione degli operatori del campo $\tilde{\Psi}_\nu$, implica che nella Lagrangiana compaiono derivate di ordine qualsiasi delle funzioni ψ_ν . Generalizzando, ammetteremo che un operatore del campo covariante relativisticamente è funzione degli operatori non commutabili p_ν e x_ν . Pertanto tali operatori $\psi_\mu(p_\nu, x_\nu)$ rappresentano in generale campi non localizzabili nello spazio-tempo e non commutabili (MARKOV, YUKAWA). Anche in questo caso si deve definire, usando R.C.O., il prodotto « tagliato » di 2 operatori e le corrispondenti regole di commutazione.

L'applicazione del metodo di R.C.O. al processo della produzione dei mesoni nell'urto di due nucleoni dà i risultati seguenti.

Indicando con E_{01} , E_{02} e E_{f1} , E_{f2} le energie dei nucleoni prima e dopo l'urto, misurate nel sistema baricentrico ⁽³⁾, si ha:

$$E_{01} - E_{f1} + E_{02} - E_{f2} = \sum_i \varepsilon_{\mu_i}$$

ove $\varepsilon_{\mu_i} = c\sqrt{p_i^2 + \mu_i^2 c^2}$ sono le energie totali dei mesoni prodotti. Il taglio R.C.O. rende poco probabile la creazione dei mesoni aventi energie ε_{μ_i} troppo elevate.

Perciò quando l'energia perduta nell'urto dai nucleoni è grande rispetto all'energia critica, l'emissione di un unico mesone diventa poco probabile, mentre la creazione multipla, non essendo limitata dagli operatori di taglio, assume probabilità maggiore. L'operatore G determina nel sistema baricentrico la distribuzione spettrale più probabile dei momenti dei nucleoni e dei mesoni. L'esame dei dati sperimentali e dei criteri di convergenza di alcuni risultati teorici ci inducono a concludere che l'operatore di taglio da applicarsi all'operatore del campo mesonico è: $(l^2 \square + 1)^{-2}$. Si può mostrare che in queste ipotesi la sezione d'urto nucleone-nucleone risulta sensibilmente indipendente dall'energia. I dati relativi a « curve di transizione » per la produzione degli sciami penetranti in H_2O , paraffina, C, Fe, Pb indicano che questa sezione d'urto è circa 2,5 volte inferiore alla sezione geometrica dei nucleoni. Si osserva cioè un fenomeno di « trasparenza » nell'urto dei nucleoni di elevata energia. Nel passaggio attraverso un nucleo pesante un nucleone può subire più di un urto con produzione multipla. È facile vedere che essendo la probabilità di questa produzione « plurima » (JANOSSY) proporzionale a $\sim A^{1/3}$, la sezione d'urto apparente risulta $\sim A^{2/3}$.

⁽³⁾ Acad. Brasil. Ciencias, *Symposium* 1941, ed. 1943; *C. R.*, **207**, 358, 421 (1938).

INFORMAZIONI

Nei giorni 14-17 del prossimo Giugno, si terrà a Roma presso il Consiglio Nazionale delle Ricerche un *Convegno internazionale di Ultracustica* organizzato dal Consiglio stesso e dalla Società Italiana di Fisica con il concorso dell'Unione Internazionale di Fisica.

Hanno già assicurato il loro intervento i professori: L. BERGMANN, *Wetzlar*; F. SEIDL, *Vienna*; R. POHLMANN, *Zurigo*; W. SCHAAFFS, *Berlino*; P. GRABAR, *Parigi*; A. VAN ITERBECK, *Louvain*.

Si attende l'adesione di altri relatori principali.

Il programma sarà tempestivamente inviato ai Soci della S.I.F.: coloro che intanto desiderassero informazioni circa il convegno sono pregati di rivolgersi alla relativa Segreteria, Piazza delle Scienze, 7 - Roma.

La Società Italiana di Fisica, accogliendo l'invito del Comitato per le onoranze nazionali ad AUGUSTO RIGHI che verranno celebrate a Bologna in occasione del centenario della nascita, terrà in detta città un *Congresso di Fisica* nei giorni 15-20 Settembre prossimo.

Ugualmente a Bologna nei giorni 17-20 Settembre, avrà luogo la Riunione annuale dell'Associazione Elettrotecnica Italiana.

Il grande fisico bolognese sarà commemorato domenica 17 Settembre con solenne adunanza, cui parteciperanno autorità, rappresentanze e le due Società; oratore ufficiale sarà il prof. GIORGIO VALLE, Direttore dell'Istituto di Fisica di Bologna.

Al Congresso della nostra Società, che già si profila molto interessante, verranno invitati e si spera che parteciperanno anche molti scienziati stranieri.

Nei prossimi numeri del *Nuovo Cimento* saranno date ulteriori informazioni circa il Congresso al quale ci auguriamo che i soci della Società interverranno numerosi.

L'Istituto di Fisica dell'Università di Reading comunica che dal 10 al 15 Luglio 1950 si terrà presso l'Università stessa, con l'assistenza dell'UNESCO e sotto gli auspici dell'Union Internationale de Physique, un Colloquio sulle proprietà dei semiconduttori, organizzato dai Professori M. F. MOTT e R. W. DITCHBURN. Coloro che desiderassero

partecipare al Colloquio possono richiedere il formulario d'iscrizione al Dr. H. K. HENISCH - Department of Physics, The University, Reading, Berksh., England, oppure al British Council a Roma.

Le iscrizioni si ricevono fino al 21 Aprile 1950.

L'Association des Ingenieurs Électriciens sortis de l'Institut Électrotechnique Montefiore (A.I.M.) rende note le condizioni del Concours quinquennal de la Fondation Georges Montefiore. Gli interessati possono rivolgersi per esaurienti informazioni alla A.I.M. - Rue Saint-Gilles 31, Liège (Belgique).

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

